



a)  $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}, \vec{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Die Vektoren haben beide die Länge 9 und deren Skalarprodukt ist 0, d.h. sie stehen rechtwinklig aufeinander, womit sie Seiten eines Quadrates sein können.

Es gilt (Skizze machen!)  $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}.$

Der Vektor  $\vec{AE}$  ist parallel zu  $\vec{AB} \times \vec{AD}$ . Da  $\vec{AB}$  und  $\vec{AD}$  rechtwinklig aufeinander sind, ist die Länge vom Vektorprodukt gleich dem Produkt der Längen, also 81. Diese Länge muss noch durch 9 dividiert werden, um die gewünschte Kantenlänge zu erhalten. Also

$$\vec{AE} = \frac{1}{9} \vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Und damit:  $\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{AE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$

Entsprechend:  $\vec{OF} = \vec{OB} + \vec{AE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$  und

$$\vec{OG} = \vec{OC} + \vec{AE} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\vec{OH} = \vec{OD} + \vec{AE} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

b)  $DF$  ist eine Seitendiagonale, muss als  $\sqrt{2}$  mal so lang wie  $AD$  sein und rechtwinklig zu  $AD$  sein.  $|\vec{AD}| = 29$  und  $|\vec{AF}| = 29\sqrt{2}$ .  $\vec{AD} \cdot \vec{AF} = 0$  und damit sind die Vektoren rechtwinklig zueinander.

Der Punkt  $G$  ist einfach auszurechnen:  $\vec{OG} = \vec{OF} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} 10 \\ -24 \\ 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -3 \\ 48 \end{pmatrix}.$

Für die restlichen Punkte betrachten wir den Punkt  $M_{AF}$ . Der Vektor  $M_{AF}\vec{E}$  steht rechtwinklig auf  $\vec{AF}$  und  $\vec{AD}$ , er ist also parallel zu  $\vec{AD} \times \vec{AF}$ . Da die Vektoren im Vektorprodukt rechtwinklig sind, ist die Länge vom Produkt gleich dem Produkt der Längen. Das Resultat muss also durch die Länge von  $\vec{AD}$  und dann noch 2 geteilt werden:

$$M_{AF}\vec{E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{29} \cdot \vec{AD} \times \vec{AF} = \begin{pmatrix} -17.5 \\ 2.0 \\ 10.5 \end{pmatrix}. \text{ Damit ist}$$

$$\vec{OE} = OM_{AF} + M_{AF}\vec{E} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ -10 \\ 18.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -17.5 \\ 2 \\ 10.5 \end{pmatrix} = (-14, -8, 29) \text{ und}$$

$$\vec{OB} = OM_{AF} - M_{AF}\vec{E} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ -10 \\ 18.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -17.5 \\ 2 \\ 10.5 \end{pmatrix} = (21, -12, 8).$$

Und schliesslich  $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{AD} = (21, -12, 8) + 12; 2\vec{1}; 16 = \begin{pmatrix} 33 \\ 9 \\ 24 \end{pmatrix}$  und

$$\vec{OH} = \vec{OE} + \vec{AD} = (-14, -8, 29) + 12; 2\vec{1}; 16 = (-2, 13, 45).$$

**✂ Lösung zu Aufgabe 449** ex-crossP-formel-herleiten-mit-TR

Es muss gelten

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$