



Also

$$\begin{cases} u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 = 0 & (1) \\ v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow w_3 = -\frac{u_1 w_1 + u_2 w_2}{u_3} \quad (\text{wenn } u_3 \neq 0)$$

Eingesetzt in (2):

$$\begin{aligned} v_1 w_1 + v_2 w_2 - v_3 \frac{u_1 w_1 + u_2 w_2}{u_3} &= 0 && | \cdot u_3 \quad (\text{Die Annahme } u_3 \neq 0 \text{ gilt weiterhin}) \\ u_3 v_1 w_1 + u_3 v_2 w_2 - u_1 v_3 w_1 - u_2 v_3 w_2 &= 0 \\ w_1(u_3 v_1 - u_1 v_3) + w_2(u_3 v_2 - u_2 v_3) &= 0 && | - w_2(u_3 v_2 - u_2 v_3) \\ w_1(u_3 v_1 - u_1 v_3) &= w_2(u_2 v_3 - u_3 v_2) \end{aligned}$$

Es fehlt eine Gleichung, wir können also eine Variable frei wählen. Die obige Gleichung ist trivialerweise wie folgt erfüllt:

$$w_1 \underbrace{(u_3 v_1 - u_1 v_3)}_{w_2} = w_2 \underbrace{(u_2 v_3 - u_3 v_2)}_{w_1},$$

also

$$w_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2 \quad \text{und} \quad w_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} w_3 &= -\frac{u_1 w_1 + u_2 w_2}{u_3} = -\frac{1}{u_3} \cdot (u_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + u_2(u_3 v_1 - u_1 v_3)) = \\ &= -\frac{1}{u_3} \cdot (u_1 u_2 v_3 - u_1 u_3 v_2 + u_2 u_3 v_1 - u_2 u_1 v_3) = -\frac{1}{u_3} \cdot (u_2 u_3 v_1 - u_1 u_3 v_2) = \\ &= -(u_2 v_1 - u_1 v_2) = u_1 v_2 - u_2 v_1. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Das Quadrat der Länge von \vec{w} werden wir auf zwei Arten berechnen: Erstens als $\vec{w} \cdot \vec{w}$ (unten in der Variablen \mathbf{lw} gespeichert), zweitens als das Quadrat der gewünschten Länge des Vektorprodukts $|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \sin(\angle(\vec{u}, \vec{v}))^2$, unten in der Variablen \mathbf{vw} gespeichert.

Es gilt $\sin(\alpha)^2 = 1 - \cos(\alpha)^2$. Der Cosinus kann mit dem Skalarprodukt berechnet werden.

Die gewünschte Länge ist also

$$|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \left(1 - \frac{\overbrace{\cos(\angle(\vec{u}, \vec{v}))^2}^{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}}{|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2} \right) \stackrel{|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}}{=} (\vec{u} \cdot \vec{u}) \cdot (\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

Auf dem TR kann die Gleichheit der Ausdrücke überprüft werden (ginge auch von Hand):

```
[v1,v2,v3] -> v
[u1,u2,u3] -> u
[u2*v3-u3*v2, u3*v1-u1*v3, u1*v2 - u2*v1] -> w
dotP(w,w) -> lw
dotP(u,u)*dotP(v,v) - dotP(u,v)^2 -> vw
lw-vw
expand(lw-vw)
```

Wenn der TR Null liefert, haben wir eine Formel zur Berechnung des Vektorprodukts gefunden.

In Maxima (ein freies Computer-Algebra-System) sieht das wie folgt aus:

```
u:matrix([u1,u2,u3]);
v:matrix([v1,v2,v3]);
```