


**✂ Lösung zu Aufgabe 445** ex-winkel-zwischen-vektoren-berechnen

Es gilt

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha) \quad \text{mit } \alpha = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}).$$

Daraus folgt

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}.$$

**✂ Lösung zu Aufgabe 446** ex-winkel-im-dreieck

$$\text{Winkel } \alpha = \arccos\left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}\right).$$

Analog für  $\beta$  und  $\gamma$ . Mit dem TR:

$$[2, -4, 1] \rightarrow \mathbf{a}$$

$$[-2, -1, 4] \rightarrow \mathbf{b}$$

$$[0, 7, -2] \rightarrow \mathbf{c}$$

$$\cos^{-1}(\text{dotP}(\mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a})/\text{norm}(\mathbf{b}-\mathbf{a})/\text{norm}(\mathbf{c}-\mathbf{a}))$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{16 \cdot \sqrt{1139}}{1139}\right)$$

ctrl enter

61.7001

$$\cos^{-1}(\text{dotP}(\mathbf{a}-\mathbf{b}, \mathbf{c}-\mathbf{b})/\text{norm}(\mathbf{a}-\mathbf{b})/\text{norm}(\mathbf{c}-\mathbf{b}))$$

ctrl enter

88.0726

$$\cos^{-1}(\text{dotP}(\mathbf{a}-\mathbf{c}, \mathbf{b}-\mathbf{c})/\text{norm}(\mathbf{a}-\mathbf{c})/\text{norm}(\mathbf{b}-\mathbf{c}))$$

ctrl enter

30.2274

Überschlagsmässig stellt man fest, dass die Winkelsumme  $180^\circ$  beträgt. Das Resultat ist plausibel.
**✂ Lösung zu Aufgabe 447** ex-parallelogramm-flaeche

Zeichnet man die Höhe  $h_a$  durch den Punkt  $D$  ein, erhält man mit  $A$ ,  $D$  und dem Höhenfusspunkt  $H_a$  ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse  $d$ , Winkel  $\alpha$  und Gegenkathete  $h_a$ . Damit ist

$$h_a = d \cdot \sin(\alpha).$$

Die Flächenformel für ein Parallelogramm ist  $a \cdot h_a$ , also

$$F = a \cdot d \cdot \sin(\alpha)$$

**✂ Lösung zu Aufgabe 448** ex-wuerfelkoordinaten