a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\vec{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Vektoren haben beide die Länge 9 und deren Skalarprodukt ist 0, d.h. sie stehen rechtwinklig aufeinander, womit sie Seiten eines Quadrates sein können.

Es gilt (Skizze machen!) $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Der Vektor $\vec{AE}$ ist parallel zu $\vec{AB} \times \vec{AD}$. Da $\vec{AB}$ und $\vec{AD}$ rechtwinklig aufeinander sind, ist die Länge vom Vektorprodukt gleich dem Produkt der Längen, also 81. Diese Länge muss noch durch 9 dividiert werden, um die gewünschte Kantenlänge zu erhalten. Also

$\vec{AE} = \frac{1}{9}\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Und damit: $\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{AE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Entsprechend: $\vec{OF} = \vec{OB} + \vec{AE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ und

$\vec{OG} = \vec{OC} + \vec{AE} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$\vec{OH} = \vec{OD} + \vec{AE} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

b) DF ist eine Seitendiagonale, muss als $\sqrt{2}$ mal so lang wie AD sein und rechtwinklig zu AD sein.

$|\vec{AD}| = 29$ und $|\vec{AF}| = 29\sqrt{2}$. $\vec{AD} \cdot \vec{AF} = 0$ und damit sind die Vektoren rechtwinklig zueinander.

Der Punkt G ist einfach auszurechnen: $\vec{OG} = \vec{OF} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} 10 \\ -24 \\ 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -3 \\ 48 \end{pmatrix}$.

Für die restlichen Punkte betrachten wir den Punkt M_{AF}. Der Vektor $\vec{M_{AF}E}$ steht rechtwinklig auf $\vec{AF}$ und $\vec{AD}$, er ist also parallel zu $\vec{AD} \times \vec{AF}$. Da die Vektoren im Vektorprodukt rechtwinklig sind, ist die Länge vom Produkt gleich dem Produkt der Längen. Das Resultat muss also durch die Länge von $\vec{AD}$ und dann noch 2 geteilt werden:

$\vec{M_{AF}E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{29} \cdot \vec{AD} \times \vec{AF} = \begin{pmatrix} -17.5 \\ 2.0 \\ 10.5 \end{pmatrix}$. Damit ist

$\vec{OE} = \vec{OM_{AF}} + \vec{M_{AF}E} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ -10 \\ 18.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -17.5 \\ 2 \\ 10.5 \end{pmatrix} = (-14, -8, 29)$ und

$\vec{OB} = \vec{OM_{AF}} - \vec{M_{AF}E} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ -10 \\ 18.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -17.5 \\ 2 \\ 10.5 \end{pmatrix} = (21, -12, 8)$.

Und schliesslich $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{AD} = (21, -12, 8) + 12; \vec{21}; 16 = \begin{pmatrix} 33 \\ 9 \\ 24 \end{pmatrix}$ und

$\vec{OH} = \vec{OE} + \vec{AD} = (-14, -8, 29) + 12; \vec{21}; 16 = (-2, 13, 45)$.

Lösung zu Aufgabe 449 ex-crossP-formel-herleiten-mit-TR

Es muss gelten

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \qquad \text{und} \qquad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$