



✂ **Aufgabe 478** Seien  $X$  und  $Y$  die Augenzahl je eines fairen Würfelwurfs.

- Sei  $Z = X + Y$ . Für welchen Zufallsversuch steht  $Z$ ? Berechnen Sie  $P(Z = i)$  für  $i = 1, 2, \dots, 12$ .
- Sei  $Z = 10X + Y$ . Berechnen Sie  $P(Z < 33)$ .
- Berechnen Sie  $P(X + X = 5)$ .

**Definition 65** Erwartungswert

Der Erwartungswert  $E(X)$  einer Zufallsvariablen  $X$  ist

$$E(X) = \sum_{w \in W} w \cdot P(X = w),$$

wobei  $W$  die Menge aller möglichen Werte von  $X$  ist. Annahme:  $W$  ist endlich und  $W \subset \mathbb{R}$ .

Der Erwartungswert kann als gewichtetes Mittel der möglichen Werte aufgefasst werden, mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten als Gewichte.

✂ **Aufgabe 479** Berechnen Sie die Erwartungswerte folgender Zufallsvariablen:

- $X$  ist das Resultat eines Würfelwurfs.
- $Y$  ist das Maximum zweier Würfelwürfe. *Summe formal bestimmen, mit TR ausrechnen: «menu 4 5».*
- $Z$  ist der Gewinn bzw. Verlust, wenn CHF 100.- im Roulette auf schwarz gesetzt werden.

✂ **Aufgabe 480** Wie viel mal muss gewürfelt werden, bis eine «Sechs» erscheint? Sei  $X$  die Zufallsvariable, die die Anzahl Versuche angibt, bis eine «Sechs» gewürfelt wurde.

- Berechnen Sie  $P(X = 1)$ ,  $P(X = 2)$  und  $P(X = 3)$ .
- Finden Sie eine Formel für  $P(X = i)$  für  $i \in \mathbb{N}^+$ .
- Berechnen Sie  $E(X)$ . *Formel herleiten, mit TR ausrechnen.*

✂ **Aufgabe 481** Das Spiel «Zahlenraten» geht wie folgt: Der Startspieler wählt eine natürliche Zahl zwischen 1 und  $n$  aus, wobei  $n$  beiden Spielern bekannt ist. Der andere Spieler muss die Zahl erraten. Der Startspieler sagt dann jeweils: «die gesuchte Zahl ist grösser», «die gesuchte Zahl ist kleiner», oder «Zahl gefunden!», womit das Spiel beendet ist. Sonst ratet der andere Spieler weiter.

Ziel ist es, mit so wenig Versuchen wie möglich die Zahl zu erraten.

Sei  $X_n$  die Zufallsvariable, die die Anzahl Versuche angibt, mit optimaler Strategie die richtige Zahl aus  $n$  verschiedenen Zahlen zu finden.

- Spielen Sie das Spiel zu zweit mit  $n = 100$  und notieren Sie sich die Anzahl Versuche.
- Was ist wohl die beste Rate-Strategie?
- Wie viele Rateversuche braucht man höchstens für  $n = 100$ ? Wie viele Versuche denken Sie, dass für  $n = 1'000'000$  nötig sind? Für allgemeines  $n$ ?
- Berechnen Sie  $E(X_1)$ ,  $E(X_2)$  und  $E(X_3)$ .
- Berechnen Sie  $E(X_4)$  mit Hilfe von  $E(X_1)$  und  $E(X_2)$ . *Man betrachtet  $X_4$  so, als ob  $X_4$  nur die Werte 1,  $1 + E(X_1)$  und  $1 + E(X_2)$  liefern würde.*
- Berechnen Sie  $E(X_n)$  für  $n$  ungerade mit Hilfe von  $E(X_m)$  mit  $m = (n - 1)/2$ .
- Berechnen Sie  $E(X_n)$  für  $n$  gerade mit Hilfe von  $E(X_m)$  und  $E(X_{m-1})$  mit  $m = n/2$ .
- Implementieren Sie die Berechnung von  $E(X_n)$  in Excel.