f) $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$. Mehr als ein Versuch ist mit $P(X_n > 1) = \frac{n-1}{n}$ nötig. Nach dem ersten Versuch bleiben $m = (n-1)/2$ Zahlen übrig, wofür insgesamt $E(X_m) + 1$ Versuche nötig sind. Es gilt also für ungerade n:
$E(X_n) = 1 \cdot \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot (1 + E(X_m))$.

g) $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$. Mehr als ein Versuch ist mit $P(X_n > 1) = \frac{n-1}{n}$ nötig. Nach dem ersten fehlgeschlagenen Versuch bleiben m Zahlen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{m}{n-1}$ übrig, wofür dann insgesamt $E(X_m) + 1$ Versuche nötig sind. Oder es bleiben $(m-1)$ Zahlen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{m-1}{n-1}$, wofür dann insgesamt $E(X_{m-1}) + 1$ Versuche nötig sind. Es gilt also für gerade n:
$E(X_n) = 1 \cdot \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{m}{n-1} \cdot (E(X_m) + 1) + \frac{m-1}{n-1} \cdot (E(X_{m-1}) + 1) \right)$.

h) Vorschlag: 5 Spalten mit n, m, $E(X_m)$, $E(X_{m-1})$ und $E(X_n)$. Die Werte von $E(X_m)$ können mit der Excel-Funktion «OFFSET» (bzw. «BEREICH.VERSCHIEBEN» auf deutsch) ausgelesen werden. Hilfe zur genauen Verwendung finden Sie in Excel oder online.

Programmieren Sie die Zeilen für $n = 2$ und $n = 3$, markieren Sie dann beide gleichzeitig und kopieren Sie die Zeilen so nach unten (damit wird abwechselnd die erste und zweite markierte Zeile kopiert).

⚒ Lösung zu Aufgabe 482 ex-repe-mini-lotto

a) Total mögliche Tipps: $\binom{20}{4} = 4845$. Genau einer davon gewinnt, und damit ist $P(4 \text{ Richtige}) = \frac{1}{4845} \approx 0.02064\%$.

b) Um drei Richtige aus 4 auszuwählen, hat man $\binom{4}{3} = 4$ Möglichkeiten. Um eine «Falsche» auszuwählen hat man noch 16 Möglichkeiten. Total also $4 \cdot 16 = 64$ Möglichkeiten. Damit ist $P(3 \text{ Richtige}) = \frac{64}{4845} \approx 1.321\%$.

c) Zwei Richtige aus vier, also $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten. Zwei «Falsche» aus 16, ergibt $\binom{16}{2} = 120$ Möglichkeiten. Total also $6 \cdot 120 = 720$ Möglichkeiten. Damit ist $P(2 \text{ Richtige}) = \frac{720}{4845} = \frac{48}{323} \approx 14.86\%$.

d) Sei X die Zufallsvariable, die den Gewinn oder Verlust bei diesem Lottospiel beschreibt. Die möglichen Werte sind $W = \{-1, 4, 19, 999\}$. $P(X = -1) = 1 - P(X > 0) = 1 - \frac{1}{4845} - \frac{64}{4845} - \frac{720}{4845} = \frac{4060}{4845} = \frac{812}{969} \approx 83.80\%$.

Der Erwartungswert ist also
$E(X) = -1 \cdot \frac{4060}{4845} + 4 \cdot \frac{720}{4845} + 19 \cdot \frac{64}{4845} + 999 \cdot \frac{1}{4845} = \frac{1035}{4845} \approx 0.2136$.

Der Erwartungswert ist positiv. Die Lottogesellschaft wird auf lange Sicht gut 21 Rappen Verlust pro Spiel einfahren. Die Gewinnquoten sollten nach unten angepasst werden. (Z.B. 1000.-, 10.- und 3.- würde zu einem Gewinn von ca. 5 Rappen für die Lotto-Gesellschaft pro Spiel führen).

⚒ Lösung zu Aufgabe 483 ex-repe-clochards

$P(\text{Clochard } \textbf{und} \text{ Zapfenzieher}) = 0.001 \cdot 0.9 = 0.0009$

$P(\text{Nichtclochard } \textbf{und} \text{ Zapfenzieher}) = 0.999 \cdot 0.05 = 0.04995$.

Von allen potentiell gefundenen Zapfenziehern $(0.0009 + 0.04995)$ stammen 1.77% von den Clochards. Der Inspektor irrt sich also mit einer Wahrscheinlichkeit von 98.23%.

Quelle: Aufgabe 70 aus https://www.swisseduc.ch/mathematik/munterbunt_aufgabensammlung/docs/wahrscheinlichkeit.pdf, abgerufen am 15. Januar 2019

⚒ Lösung zu Aufgabe 484 ex-repe-geburtstagsproblem

Wir berechnen die Gegenwahrscheinlichkeit. Dazu zeichnet man einen Baum (eigentlich nur ein Pfad), wo jede zusätzliche Person an einem Tag Geburtstag hat, wo noch keine andere ihren Geburtstag hat. Man erhält:
$P(\text{alle verschieden}) = 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365-n+1}{365}$.

Für $n = 15$ erhält man: $1 - P(\text{alle verschieden}) \approx 1 - 0.7471 = 0.2529$.

Für $n = 20$ erhält man: $1 - P(\text{alle verschieden}) \approx 1 - 0.5886 = 0.4114$.

Für $n = 25$ erhält man: $1 - P(\text{alle verschieden}) \approx 1 - 0.4313 = 0.5687$.