1. Cardanosche Lösungsformel

Es gelte $\operatorname{char} k \neq 2, 3$. Betrachte

$$X^3 + b_2X^2 + b_1X + b_0.$$

Die Substitution $X = Z - \frac{1}{3}b_2$ (wegen Charakteristik $\neq 3$ erlaubt) eliminiert das quadratisches Glied und verändert die Diskriminante nicht. Es genügt also, kubische Gleichungen ohne quadratisches Glied zu betrachten.

Wir leiten die Lösungsformel (von Cardano, Tartaglia) für Nullstellen von

$$f = X^3 + bX + c \in k[X] \tag{1.1}$$

her, wobei k ein Körper mit $\operatorname{char} k \neq 2, 3$ ist.

Ansatz: Schreibe $x = u + v$. Wir wollen u und v so bestimmen, dass $f(x) = 0$ gilt. Das ist äquivalent zu

$$u^3 + v^3 + (3uv + b)(u + v) + c = 0.$$

Letzteres gilt sicherlich, wenn die beiden Gleichungen

$$3uv = -b, \tag{1.2}$$

$$u^3 + v^3 = -c \tag{1.3}$$

gelten. [1] Wir nehmen nun zunächst an, dass diese beiden Gleichungen lösbar sind, und fixieren eine Lösung (u, v). Sie implizieren

$$\begin{aligned}(u^3 - v^3)^2 &= (u^3 + v^3)^2 - 4u^3v^3 \\ &= c^2 + \frac{4}{27}b^3.\end{aligned}$$

Dann gilt

$$u^3 - v^3 = 2\sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}} \tag{1.4}$$

für die richtige Wahl der Wurzel auf der rechten Seite. Per Addition/Subtraktion von (1.3) folgen

$$\begin{aligned}u^3 &= -\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}, \\ v^3 &= -\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}},\end{aligned}$$

und dann

$$\begin{aligned}u &= \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}, \\ v &= \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}},\end{aligned}$$

wobei wir hier wieder die dritten Wurzeln richtig wählen müssen.

---

[1] Wir machen diesen Ansatz und den obigen Ansatz $x = u + v$ im Abschnitt 2 plausibel.

Dadurch motiviert kann man umgekehrt alle Lösungen von (1.2) und (1.3) und dann auch von (1.1) finden:

Lösung der Aufgaben 1a+1b auf Blatt 8:

Wir wählen eine Quadratwurzel aus $\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}$ und bezeichnen sie mit $\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}}$ (Wurzeln sind hier und im Folgenden in geeigneten Erweiterungskörpern zu wählen). Dann wählen wir eine Kubikwurzel aus $-\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}}$ und bezeichnen sie mit u_0. Ebenso wählen wir eine Kubikwurzel aus $-\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}}$ und nennen sie v_0'. Dann gilt offensichtlich

$$u_0^3 + v_0'^3 = -c,$$

also löst (u_0, v_0) bereits die Gleichung (1.2). Wegen

$$u_0^3 v_0'^3 = \frac{c^2}{4} - \Big(\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}\Big) = \Big(-\frac{b}{3}\Big)^3$$

gibt es genau ein $i \in \{0, 1, 2\}$ so dass

$$u_0 v_0' \zeta^i = -\frac{b}{3}$$

gilt, wobei ζ eine fixierte primitive dritte Einheitswurzel ist. Es folgt, dass

$$(u_0, v_0) := (u_0, v_0'\zeta^i)$$

eine Lösung von (1.3) und offensichtlich auch von (1.2) ist. Wir erhalten insgesamt die folgenden drei Lösungen

$$(u_0, v_0), \quad (u_0\zeta, v_0\zeta^2), \quad (u_0\zeta^2, v_0\zeta)$$

von (1.2) und (1.3). Beachte, dass hier als linker Eintrag genau die möglichen Wahlen der Kubikwurzel auftauchen, und dann die andere Kubikwurzel als der rechte Eintrag gewählt werden muss, um (1.2) zu erfüllen. Die Wahl der Quadratwurzel ist insofern irrelevant, dass sie nur die beiden Einträge der obigen Paare vertauscht (was offensichtlich wieder Lösungen von (1.2) und (1.3) liefert).

Insgesamt zeigt dies, dass die Lösungen von (1.2) und (1.3) genau durch

$$\{(u_0, v_0), (u_0\zeta, v_0\zeta^2), (u_0\zeta^2, v_0\zeta), (v_0, u_0), (v_0\zeta^2, u_0\zeta), (v_0\zeta, u_0\zeta^2)\}$$

gegeben sind. (Es könnnen jedoch Paare übereinstimmen, etwa ist $(0, 0)$ die einzige Lösung, falls $b = c = 0$.)

Damit sind

$$\begin{aligned} \alpha &:= u_0 + v_0, \\ \beta &:= u_0\zeta + v_0\zeta^2, \\ \gamma &:= u_0\zeta^2 + v_0\zeta, \end{aligned}$$

Lösungen von $f(X) = X^3 + bX + c = 0$. Polynomdivision von f durch $X - \alpha$ liefert

$$f = (X - \alpha)(X^2 + \alpha X + (\alpha^2 + b))$$

Dann rechnet man explizit unter Verwendung von $\zeta^2 + \zeta + 1 = 0$ und $3u_0v_0 = -b$ (1.2) nach, dass $X^2 + \alpha X + (\alpha^2 + b) = (X - \beta)(X - \gamma)$ gilt. Insgesamt also

$$f = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma),$$

so dass α, β, γ genau die Nullstellen von f (in einem geeigneten fixierten Erweiterungskörper) sind.

Eine weitere Rechnung, die neben $\zeta^2 + \zeta + 1 = 0$ auch $\zeta - \zeta^2 = \sqrt{-3}$ verwendet (letzteres gilt, denn ζ ist Nullstelle von $X^2 + X + 1$, also zeigt die Lösungsformel für quadratische Gleichungen $\zeta = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ für die richtige Wahl von $\sqrt{-3}$ (bzw. eine Wahl von $\sqrt{3}$ liefert ein ζ)), zeigt

$$(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma) = 3\sqrt{-3}(u_0^3 - v_0^3).$$

Durch Quadrieren erhalten wir mit (1.4) für die Diskriminante die Formel

$$\Delta = -27(u_0^3 - v_0^3)^2 = -27c^2 - 4b^3. \tag{1.5}$$

Remark 1.1. Entsprechendes läßt sich noch für Gleichungen 4. Grades machen. Aber von Grad 5 an aufwärts ändert sich die Situation grundlegend, siehe Vorlesung.

2. Lösung der Sternaufgabe auf Blatt 8

Wir erklären, warum die obigen Ansätze plausibel sind.

Sei k ein Körper der Charakteristik $\neq 2, 3$. Wir nehmen an, dass k eine primitive dritte Einheitswurzel ζ enthält.

Wir arbeiten in der Galois-Erweiterung

$$k(s_1, s_2, s_3) = k(T_1, T_2, T_3)^{S_3} \subset k(T_1, T_2, T_3). \tag{2.1}$$

Sei $g = (123) \in S_3$. Wir fassen g auf als Endomorphismus von $kT_1 \oplus kT_2 \oplus kT_3$. Dieser Endomorphismus ist diagonalisierbar: Die Elemente

$$\begin{aligned} s_1 &= T_1 + T_2 + T_3, \\ U &:= \frac{1}{3}(T_1 + \zeta^2 T_2 + \zeta T_3), \\ V &:= \frac{1}{3}(T_1 + \zeta T_2 + \zeta^2 T_3) \end{aligned}$$

bilden eine Basis von $kT_1 \oplus kT_2 \oplus kT_3$ aus Eigenvektoren von g zu den Eigenwerten $1, \zeta, \zeta^2$.

Die allgemeine Gleichung dritten Grades

$$f(X) = X^3 - s_1X^2 + s_2X - s_3 \in k(T_1, T_2, T_3)^{S_3}[X] \subset k(T_1, T_2, T_3)[X]$$

hat die Lösungen

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{3}s_1 + U + V,\\
T_2 &= \frac{1}{3}s_1 + \zeta U + \zeta^2 V,\\
T_3 &= \frac{1}{3}s_1 + \zeta^2 U + \zeta V.
\end{aligned}$$

Also hat

$$g(X) := f(X + \frac{1}{3}s_1) = X^3 + bX + c \in k(T_1, T_2, T_3)^{S_3}[X] \subset k(T_1, T_2, T_3)[X]$$

die drei Lösungen

$$\begin{aligned}
T_1 - \frac{1}{3}s_1 &= U + V,\\
T_2 - \frac{1}{3}s_1 &= \zeta U + \zeta^2 V,\\
T_3 - \frac{1}{3}s_1 &= \zeta^2 U + \zeta V.
\end{aligned}$$

Jede Lösung hat also die Form $u + v$, wobei u ein Vektor im ζ-Eigenraum von g ist und v ein Vektor im ζ^2-Eigenraum von g. Dies macht den ersten Ansatz plausibel. Schreibt man $g(u + v) = 0$ aus, so erhält man

$$\underbrace{u^3 + v^3 + c}_{g:1} + \underbrace{u(3uv + b)}_{g:\zeta} + \underbrace{v(3uv + b)}_{g:\zeta^2} = 0$$

in $k(T_1, T_2, T_3)$. Die durch Klammern zusammengefaßten Terme sind in den Eigenräumen von g (als Endomorphismus von $k(T_1, T_2, T_3)$) mit den angegebenen Eigenwerten, es operiert etwa g auf $3uv + b$ durch den Eigenwert 1. Da Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, folgern wir

$$\begin{aligned}
u^3 + v^3 + c &= 0,\\
3uv + b &= 0.
\end{aligned}$$

Dies sind genau die Gleichungen (1.2) und (1.3). Somit ist auch der zweite Ansatz plausibel gemacht.