Umformungen aus der Prüfung, ausführlich erklärt

Aufgabe 1

(a) Allgemein: Solange nur multipliziert, dividiert und potenziert (aber nicht addiert oder subtrahiert) wird, ist es oft einfacher, mit der Primfaktorzerlegung (oder zumindest einer Zerlegung in gewisse Faktoren) zu rechnen, als auszumultiplizieren!

$$
\begin{aligned}
2^{-7} \cdot 7^{-4} \cdot 196^3 &= 2^{-7} \cdot 7^{-4} \cdot \left(2^2 \cdot 7^2\right)^3 && \text{Primfaktorzerlegung}\\
&= 2^{-7} \cdot 7^{-4} \cdot (2^2)^3 \cdot (7^2)^3 && \text{Potenzgesetz } (ab)^e = a^e b^e \text{ («gleicher Exponent») mit } a = 2^2 \text{ und } b = 7^2 \text{ und } e = 3\\
&= 2^{-7} \cdot 7^{-4} \cdot 2^6 \cdot 7^6 && \text{Potenzgesetz } (a^e)^f = a^{ef}\text{, zweimal angewendet}\\
&= 2^{-7} \cdot 2^6 \cdot 7^{-4} \cdot 7^6 && \text{Faktoren umsortieren (Kommutativgesetz)}\\
&= 2^{-1} \cdot 7^2 && \text{Potenzgesetz } a^e a^f = a^{e+f} \text{ («gleiche Basis»), zweimal angewendet}\\
&= \frac{49}{2}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\left(-\frac{6}{5} + \frac{52}{35}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{7}{3}\right)^{-3} &= \left(\frac{52-42}{35}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{7}{3}\right)^{-3} && \text{Addition von Brüchen (gleichnamig machen)}\\
&= \left(\frac{2}{7}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^{3} && \text{Kürzen}\\
&= \left(\frac{7}{2}\right)^{2} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^{3} && \text{wegen } \left(\tfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\tfrac{b}{a}\right)^{n}\\
&= \frac{7^2}{2^2} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^{3} && \text{wegen } \left(\tfrac{a}{b}\right)^{n} = \tfrac{a^n}{b^n}\\
&= \frac{7^2}{2^2} \cdot \left(-\left(\frac{3}{7}\right)^{3}\right) && \text{wegen } (-a)^{\text{ungerade}} = -a^{\text{ungerade}} \text{ mit } a = \tfrac{3}{7}\\
&= -\frac{7^2}{2^2} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{3} && \text{wegen } a \cdot (-b) = -ab\\
&= -\frac{7^2}{2^2} \cdot \frac{3^3}{7^3} && \text{wegen } \left(\tfrac{a}{b}\right)^{n} = \tfrac{a^n}{b^n}\\
&= -\frac{3^3}{2^2 \cdot 7} && \text{Multiplikation von Brüchen und Kürzen}\\
&= -\frac{27}{28}
\end{aligned}
$$

(c) Im Folgenden sind manche der Schritt, die bereits oben aufgetaucht sind, nicht mehr explizt erklärt.

$$
\begin{aligned}
5^2 \cdot 7^3 \cdot 175^{-2} &= 5^2 \cdot 7^3 \cdot \left(5^2 \cdot 7^1\right)^{-2} && \text{analog wie bei der vorvorherigen Aufabe}\\
&= 5^2 \cdot 7^3 \cdot 5^{-4} \cdot 7^{-2}\\
&= 5^{-2} \cdot 7^1\\
&= \frac{7}{25}
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{4}-\frac{11}{12}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{-3} &= \left(\frac{3-11}{12}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{-3} && \text{im Wesentlichen analog wie bei der vorvorherigen Aufabe}\\
&= \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{3}\\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{3} && \text{wegen } (-a)^{\text{gerade}} = a^{\text{gerade}} \text{ mit } a=\tfrac{2}{3}\\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2^2}{3^2}\right)^{3}\\
&= \frac{3^2}{2^2}\cdot\frac{\left(2^2\right)^3}{\left(3^2\right)^3}\\
&= \frac{3^2}{2^2}\cdot\frac{2^6}{3^6}\\
&= \frac{2^4}{3^4}\\
&= \frac{16}{81}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 (beide Versionen)

(a)

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{s}{12}\right)^{-3}}{\left(\frac{18}{s}\right)^{2}} &= \frac{\left(\frac{12}{s}\right)^{3}}{\left(\frac{18}{s}\right)^{2}} && \text{wegen } \left(\tfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\tfrac{b}{a}\right)^{n}\\
&= \frac{\frac{12^3}{s^3}}{\frac{18^2}{s^2}}\\
&= \frac{12^3}{s^3}\cdot\frac{s^2}{18^2} && \text{Division = Multiplikation mit Kehrwert}\\
&= \frac{(2^2\cdot 3)^3}{s\cdot(2\cdot 3^2)^2} && \text{Multiplikation von Brüchen, Kürzen mit } s^2 \text{ und Primfaktorzerlegung}\\
&= \frac{\left(2^2\right)^3\cdot 3^3}{s\cdot 2^2\cdot 3^4} && \text{Potenzgesetz } (ab)^e = a^e b^3\\
&= \frac{2^6\cdot 3^3}{s\cdot 2^2\cdot 3^4} && \text{Potenzgesetz } (a^e)^f = a^{ef}\\
&= \frac{2^4}{3s} && \text{Kürzen mit } 2^2\cdot 3^3\\
&= \frac{16}{3s}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\left(-4^{3n}\right)^{-2} \cdot \left(-8^{-2}\right)^{-3n} &= \left(4^{3n}\right)^{-2} \cdot \left(-8^{-2}\right)^{-3n} && \text{wegen } (-a)^{\text{gerade}} = a^{\text{ungerade}} \text{ mit } a = 4 \\
&= 4^{-6n} \cdot \left(-8^{-2}\right)^{-3n} && \text{wegen } (a^e)^f = a^{ef} \\
&= 4^{-6n} \cdot \left((-1) \cdot 8^{-2}\right)^{-3n} && \text{wegen } -a = (-1) \cdot a \\
&= 4^{-6n} \cdot (-1)^{-3n} \cdot \left(8^{-2}\right)^{-3n} && \text{wegen } (ab)^e = a^2 \cdot b^e \\
&= 4^{-6n} \cdot (-1)^{-3n} \cdot 8^{6n} && \text{wegen } (a^e)^f = a^{ef} \\
&= (-1)^{-3n} \cdot \left(2^2\right)^{-6n} \cdot \left(2^3\right)^{6n} && \text{Primfaktorzerlegung} \\
&= (-1)^{-3n} \cdot 2^{-12n} \cdot 2^{18n} && \text{wegen } (a^e)^f = a^{ef} \\
&= (-1)^{-3n} \cdot 2^{6n} && \text{wegen } (a^e \cdot a^f = a^{e+f} \\
&= \begin{cases} 2^{6n} & \text{falls } n \text{ gerade (und damit } 3n \text{ gerade)} \\ -2^{6n} & \text{falls } n \text{ ungerade (und damit } 3n \text{ gerade)} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(2^6\right)^n & \text{falls } n \text{ gerade (und damit } 3n \text{ gerade)} \\ -\left(2^6\right)^n & \text{falls } n \text{ ungerade (und damit } 3n \text{ gerade)} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 64^n & \text{falls } n \text{ gerade (und damit } 3n \text{ gerade)} \\ -64^n & \text{falls } n \text{ ungerade (und damit } 3n \text{ gerade)} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Dass hier eine Fallunterscheidung nötig ist, ist mir leider erst spät aufgefallen.

(c)

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{s}{18}\right)^{-3}}{\left(\frac{12}{s}\right)^{2}} &= \frac{18^3}{s^3} \cdot \frac{s^2}{12^2} && \text{im Wesentlichen analog wie bei der vorvorherigen Aufabe} \\
&= \frac{3^6 \cdot 2^3}{s \cdot 2^4 \cdot 3^2} \\
&= \frac{3^4}{2s} \\
&= \frac{81}{2s}
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
\left(-8^{2n}\right)^{-3} \cdot \left((-4)^{-2}\right)^{4n} &= -\left(8^{2n}\right)^{-3} \cdot \left(4^{-2}\right)^{4n} && \text{im Wesentlichen analog wie bei der vorvorherigen Aufabe} \\
&= -8^{-6n} \cdot 4^{-8n} \\
&= -2^{-18n} \cdot \cancel{2^{16n}} && 2^{-16n} \\
&= -\cancel{2^{-2n}} && -2^{-34n} \\
&= \cancel{-\frac{1}{2^{2n}}} && = -\left(\frac{1}{2}\right)^{34n} \\
&= \cancel{-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe zur Standardform eines Polynoms

Die Hoffnung war, dass nicht stupide ausmultipliziert wird, sondern die Formel für $(a+b)^3$ (verwende das Pascalsche Dreieck) und die dritte binomische Formel verwendet werden.

 Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

ok, an der Tafel stand $p(x) = x(1+x^3) - (x^2+4)(x^2-4)$ $= x+16$

$$p(x) = x \cdot (1+x)^3 - (x^2+4)(x^2-4)$$
$$= x \cdot (1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot x + 3 \cdot 1 \cdot x^2 + x^3) - \left((x^2)^2 - 4^2\right)$$

← genial war das...

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (Pascal-Dreieck)
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ (dritte binomische Formel)
- grosse Klammer beachten!

$$= x \cdot (1 + 3x + 3x^2 + x^3) - (x^4 - 16)$$
$$= x + 3x^2 + 3x^3 + x^4 - x^4 + 16$$
$$= 3x^3 + 3x^2 + x + 16$$