

9 Funktionen

Eine Funktion kann intuitiv als eine Art «Maschine» aufgefasst werden, die aus einem «Input» einen «Output» generiert. Z. B. ist die Maschine, die eine Zahl als Input entgegen nimmt, daraus die Wurzel zieht, davon die Gegenzahl nimmt und das Ergebnis dieser Berechnungen als Output liefert, eine Funktion.



Unsere Beispielfunktion liefert beim Input 7 als Output $-\sqrt{7}$.

Der «Input» wird **Argument** genannt, der «Output» **Wert**.

Die **Definitionsmenge** besteht aus allen erlaubten Argumenten, gibt also an, was als Argument («Input») überhaupt zulässig ist. Im Beispiel sind als Argumente alle positiven reellen Zahlen und Null erlaubt; die maximal mögliche Definitionsmenge besteht also aus allen positiven reellen Zahlen und der Null. Die Definitionsmenge kann aber auch kleiner sein als maximal möglich (im Beispiel könnte man auch $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ als Definitionsmenge nehmen).

Die **Wertemenge** besteht mindestens aus allen möglichen Werten («Outputs»), die produziert werden können. In unserem Beispiel kommen alle negativen reellen Zahlen und die Null als Werte vor, die Wertemenge besteht also mindestens aus diesen Zahlen. Der Wertebereich kann aber auch grösser angegeben werden als minimal möglich (hier z. B. \mathbb{R}).

Statt Definitionsmenge sagt man auch *Definitonsbereich*, statt Wertemenge *Wertebereich*.

Definition 9.1 Funktion

Eine **Funktion** ist eine Vorschrift, die jedem Element einer Definitionsmenge **genau ein** Element einer Wertemenge zuordnet.

Funktion oder nicht?

- Jedem Schuhmodell eines Versandhauses wird der entsprechende Preis zugeordnet.
- Jeder Schülerin wird eine Zeugnisnote in Mathematik zugeordnet.
- Jeder Zeugnisnote werden die Schüler einer Klasse zugeordnet.
- Jeder natürlichen Zahl wird ihre Quadratzahl zugeordnet.
- Jedem Zeitpunkt wird die Position eines Smartphones zugeordnet.
- Jeder Position eines Smartphones werden die entsprechenden Zeitpunkte zugeordnet.

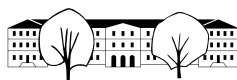
In der Mathematik interessieren wir uns in erster Linie für Funktionen, die Zahlen wieder Zahlen zuordnen; dabei betrachten wir fast immer Funktionen, die durch eine Formel beschrieben werden können.

9.1 Notation für einige Zahlenmengen

Die folgenden Schreibweisen sind beispielsweise nützlich zur Angabe von Definitions- und Wertemengen.

\mathbb{R}^*	(die Menge) alle(r) reellen Zahlen ausser der Null:	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
\mathbb{R}^+	(die Menge) alle(r) positiven reellen Zahlen:	$\mathbb{R}^+ =]0, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
\mathbb{R}_0^+	(die Menge) alle(r) positiven reellen Zahlen und der Null:	$\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
\mathbb{R}^-	(die Menge) alle(r) negativen reellen Zahlen:	$\mathbb{R}^- =]-\infty, 0[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$
\mathbb{R}_0^-	(die Menge) alle(r) negativen reellen Zahlen und der Null:	$\mathbb{R}_0^- =]-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

In derselben Weise definiert man die Mengen \mathbb{Q}^* , \mathbb{Q}^+ , \mathbb{Q}_0^+ , \mathbb{Q}^- , \mathbb{Q}_0^- und analog für \mathbb{Z} . Bei den natürlichen Zahlen verwendet man eigentlich nur die Notation \mathbb{N}^+ .



✂ **Aufgabe 9.1** Wahr oder falsch? Falls die Aussage falsch ist, korrigieren Sie diese mit möglichst kleinen Änderungen.

- | | | |
|--|---|--|
| a) $\mathbb{N}^+ = \mathbb{Z}^+$ | b) $\mathbb{R}^- = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$ | c) $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$ |
| d) $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ | e) $\mathbb{R}_0^- \cap \mathbb{Q}_0^+ = \{0\}$ | f) $\mathbb{R}_0^+ \cup \mathbb{Z}^- = \mathbb{Q}$ |

9.2 Notation von Funktionen

In ausführlicher Weise wird eine Funktion f wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{W} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

wobei gelten:

- f ist der **Name der Funktion** (normalerweise ein beliebiger Kleinbuchstabe)
- \mathbb{D} ist die Definitionsmenge (meist maximal gross)
- \mathbb{W} ist die Wertemenge (oft minimal klein)
- x ist das **Argument**, wobei x aus \mathbb{D} kommt. Die Wahl des Buchstabens ist beliebig (er darf aber noch nicht anderweitig verwendet sein).
- $f(x)$ ist der **Wert** von f an der **Stelle** x . Dabei muss $f(x)$ ein Element von \mathbb{W} sein (für jedes Argument $x \in \mathbb{D}$).

Statt $f(x)$ steht dort meist eine Formel, die angibt, wie $f(x)$ aus x berechnet wird, vgl. die nachfolgenden Beispiele.

Sprechweise für obige Notation:

- Sprich: « f von \mathbb{D} nach \mathbb{W} » für $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{W}$.
- Sprich: « x wird abgebildet auf f von x » für $x \mapsto f(x)$:

Beispiele:

$$\begin{array}{llll} a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & s : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^* & q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x \mapsto x + 5 & r \mapsto 3r & t \mapsto \frac{1}{t} & v \mapsto v^2 \end{array}$$

Diese Funktionen können auch abgekürzt wie folgt geschrieben werden:

$$a(x) = x + 5 \quad m(r) = 3r \quad s(t) = \frac{1}{t} \quad q(v) = v^2$$

Dabei wird jeweils die grösstmögliche Definitionsmenge angenommen (falls möglich \mathbb{R}) und die kleinstmögliche Wertemenge, d. h. $\mathbb{W} = \{f(x) \mid x \in \mathbb{D}\}$.

Die obige Funktion a ist die «Maschine», die eine Zahl als Argument («Input») bekommt, 5 dazu zählt und dieses Resultat als Wert («Output») produziert. Entsprechend multipliziert m mit 3, s bildet den Kehrwert und q quadriert. (Die Funktionsnamen a , m , q sollen an *Addition*, *Multiplikation*, *Quadrieren* erinnern.)

Berechnen Sie:

- | | | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|--------------------|-----------------|
| a) $a(2) =$ | b) $m(7) =$ | c) $s(5) =$ | d) $q(-1) =$ |
| e) $a\left(\frac{2}{3}\right) =$ | f) $m\left(-\frac{3}{4}\right) =$ | g) $s(\sqrt{2}) =$ | h) $a(x - 2) =$ |
| i) $m(u + v) =$ | j) $q(c + d) =$ | k) $a(m(4)) =$ | l) $m(a(4)) =$ |
| m) $q(m(s(-0.5))) =$ | n) $a(s(q(\sqrt{7}))) =$ | | |



9.3 Spezielle Funktionen

In der Mathematik gibt es viele wichtige Funktionen. Einige davon kennen Sie bereits.

9.3.1 Wurzel- und Betragsfunktion

Die **Wurzelfunktion** $\sqrt{\cdot}$ ordnet jedem **nicht-negativen** reellen Argument x diejenige **nicht-negative** reelle Zahl \sqrt{x} zu, die quadriert das Argument x ergibt:

$$\begin{aligned} \sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_0^+ &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Beachten Sie: Für negative Zahlen ist die Wurzelfunktion nicht definiert. Die Wurzelfunktion liefert *stets positive* Zahlen (oder Null).

Die Gleichung $x^2 = 2$ hat **zwei Lösungen**, nämlich $+1.41421\dots$ und $-1.41421\dots$. Die Wurzelfunktion liefert, wie alle Funktionen, jedoch für jedes Argument **genau einen** Wert; es gilt $\sqrt{2} = +1.41421\dots$

Die **Betragsfunktion** $|\cdot|$ kann wie folgt definiert werden:

$$\begin{aligned} |\cdot| : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x &\mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Überprüfen Sie die Definition, indem Sie positive und negative Zahlen für x einsetzen.

✳ **Aufgabe 9.2** Erklären Sie, warum $|x| = \sqrt{x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

9.4 Nutzen von Funktionen

Mit Funktionen können z. B. physikalische Abläufe beschrieben werden, wie etwa die z -Koordinate (Höhe in m nach oben gemessen) und Geschwindigkeit v (in m/s) eines Massepunktes (beliebiger Masse) im freien Fall bei Vernachlässigung der Luftreibung. Das Argument t ist die Zeit (in Sekunden):

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 \quad v(t) = gt$$

wobei $g = -9.81$ die Erdbeschleunigung in m/s^2 ist.

✳ **Aufgabe 9.3** Berechnen Sie mit Hilfe der obigen Funktionen z und v die Fallstrecke und die Geschwindigkeit nach 0 bzw. nach 1 bzw. nach 2 bzw. nach 3 Sekunden Fallzeit.

9.5 Graph einer Funktion

✳ Aufgabe 9.4

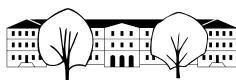
a) Zeichnen Sie ein Koordinatensystem mit einer horizontalen t -Achse (Beschriftung t statt x) und einer vertikalen s -Achse (Beschriftung s statt y). Zum Zeitpunkt $t = 0$ fährt die Trogenerbahn am Bahnhof St. Gallen ab. Zeichnen Sie, möglichst realistisch, zu jedem Zeitpunkt t die zurückgelegte Strecke $s(t)$ ein (bis zur Haltestelle Spisertor).

b) Zeichnen Sie ins gleiche Koordinatensystem mit einer vertikalen v - statt s -Achse die entsprechende Geschwindigkeit ein.

Sie haben die Graphen der Funktionen s und v gezeichnet. Beachten Sie, dass diese Funktionen nicht vernünftig mit Formeln dargestellt werden können. Beachten Sie, dass $v(t)$ angibt, wie steil der Graph von s zu einem Zeitpunkt t ist.

Definition 9.2 Graph

Der **Graph einer Funktion** f ist die Menge aller Punkte $(x, f(x))$ mit $x \in \mathbb{D}$.



✂ **Aufgabe 9.5** Zeichnen Sie jeweils den Graph der angegebenen Funktion in ein Koordinatensystem ein. Bestimmen Sie zuerst den Definitions- und Wertebereich, um nur den benötigten Teil des Koordinatensystems zeichnen zu müssen.

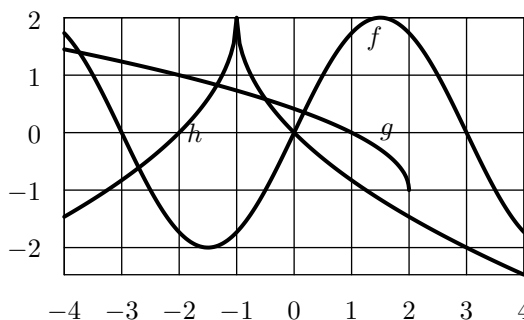
- | | | |
|----------------------------|-----------------------|------------------------------|
| a) $a(r) = \sqrt{r}$ | b) $b(q) = q^2$ | c) $c(s) = s $ |
| d) $d(t) = t$ | e) $e(u) = -u$ | f) $f(v) = \frac{1}{2}v - 1$ |
| g) $g(w) = \sqrt{9 - w^2}$ | h) $h(y) = \sqrt{-y}$ | i) $i(x) = - x - 1 + 1$ |

Um eine vernünftige Vorstellung vom Aussehen des Graphen zu bekommen, muss bei solchen (durch Formeln gegebenen) Funktionen nicht für alle Argumente der Wert der Funktion berechnet werden; selbst ein Computer wäre damit überfordert. Die Art der Formel lässt auf die Art der Kurve schliessen. Mehr dazu später.

✂ **Aufgabe 9.6**

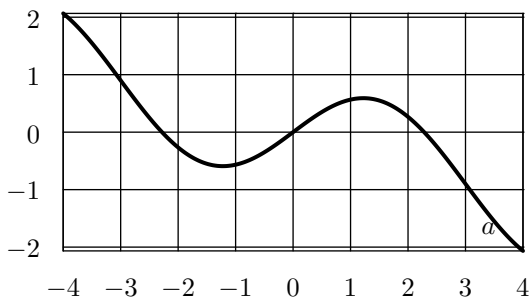
Für ganzzahlige Argumente lesen Sie die Funktionswerte der Funktionen f , g , und h aus deren Graphen ab.

Hinweis: Formeln für die Funktionen sind hier nicht gefragt!

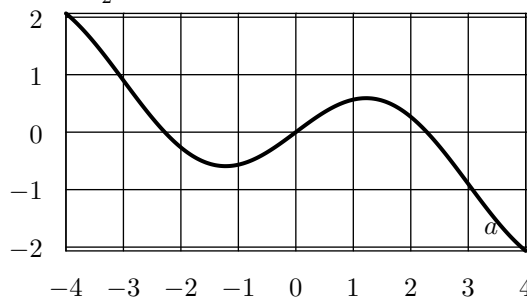


✂ **Aufgabe 9.7** Gegeben ist eine Funktion a , deren Graph in jedem der drei folgenden Koordinatensysteme eingezeichnet ist. Zeichnen Sie jeweils den Graph der angegebenen Funktion ein.

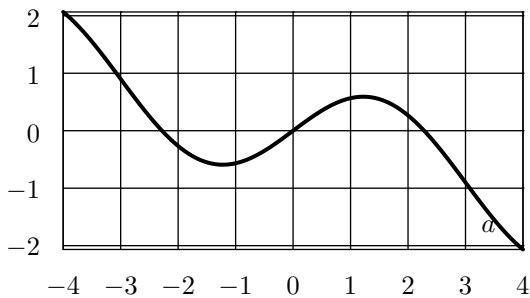
a) $f(x) = a(x) + 1$

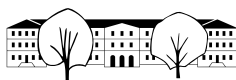


b) $g(x) = \frac{1}{2}a(x)$



c) $h(x) = -a(x)$

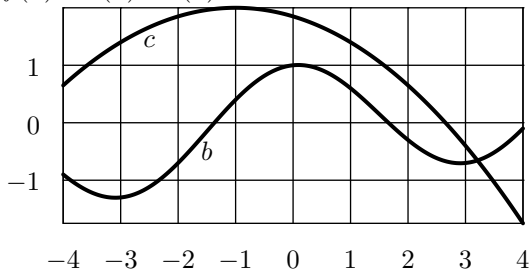




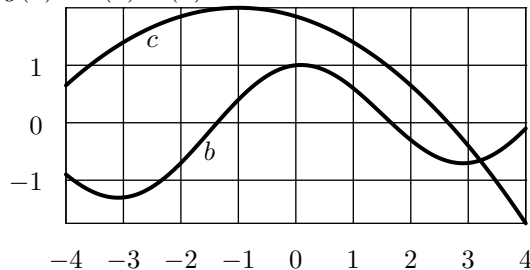
✂ **Aufgabe 9.8**

Die Graphen zweier Funktionen b und c sind in den folgenden Koordinatensystemen eingezeichnet. Ergänzen Sie jeweils den Graph der angegebenen Funktion.

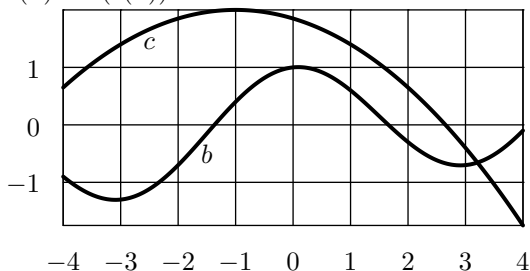
a) $f(x) = b(x) + c(x)$



b) $g(x) = b(x) \cdot c(x)$



c) $h(x) = b(c(x))$



9.6 Transformation von Funktionsgraphen

✂ **Aufgabe 9.9** Gegeben sei eine Funktion z . Beschreiben Sie die geometrische Abbildung, um aus dem Funktionsgraphen von z den Funktionsgraphen folgender Funktionen zu erhalten:

- a) $a(x) = z(x) + 2$ b) $b(x) = z(x) - 1$ c) $c(x) = z(x) + v$, wobei $v \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben ist
- d) $d(x) = 2 \cdot z(x)$ e) $e(x) = \frac{1}{2} \cdot z(x)$ f) $f(x) = -z(x)$ g) $g(x) = -2 \cdot z(x)$

Merke

Wird zur **gesamten Funktion** eine positive Zahl addiert (bzw. von ihr subtrahiert), verschiebt sich der Graph entsprechend vertikal nach oben (bzw. unten).

Merke

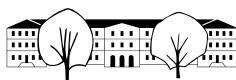
Wird die **gesamte Funktion** mit einer Zahl multipliziert, wird der Graph in y -Richtung entsprechend gestreckt (und zusätzlich gespiegelt, wenn die Zahl negativ ist).

9.7 Lineare Funktionen

✂ **Aufgabe 9.10** Beschreiben Sie möglichst präzise den Graphen der Funktion $i(x) = x$. Finden Sie einleuchtende Argumente dafür, dass der Graph die Form hat, die er hat. Hinweis: Die Funktion i wird auch «Identität» genannt. Warum wohl?

✂ **Aufgabe 9.11** Zeichnen Sie folgende Funktionsgraphen mit möglichst wenig Aufwand. Sie sollen dabei höchstens einen Punkt berechnen und/oder mit Transformationen des Graphen der Funktion $i(x) = x$ arbeiten.

- a) $a(x) = 3x$ b) $b(x) = \frac{1}{3}x$ c) $c(x) = -x$ d) $d(x) = -\frac{1}{2}x$
- e) $e(x) = x - 1$ f) $f(x) = -x + 1$ g) $g(x) = 2x - 2$ h) $h(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

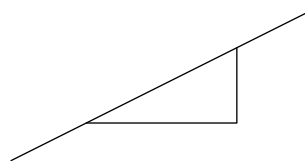


Definition 9.3 Steigung

Die **Steigung einer Geraden** im Koordinatensystem ist die reelle Zahl, die angibt, um wie viele y -Einheiten die Gerade pro x -Einheit ansteigt. Konkret

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

wobei Δy für die Differenz zweier y -Werte und Δx für die Differenz entsprechender x -Werte steht. Beachte: Differenzen sind vorzeichenbehaftet!



✂ **Aufgabe 9.12** Zeichnen Sie in ein einziges Koordinatensystem elf Ursprungsgeraden (= Geraden durch den Ursprung) mit den Steigungen $\pm \frac{1}{4}$, $\pm \frac{1}{2}$, ± 1 , ± 2 , ± 4 und 0 . Beschriften Sie die Geraden mit deren Steigungen.

✂ **Aufgabe 9.13** Gegeben sind zwei Punkte $A = (x_A, y_A)$ und $B = (x_B, y_B)$ mit unterschiedlichen x -Koordinaten. Berechnen Sie die Steigung der Geraden durch A und B .

Warum müssen die x -Koordinaten unterschiedlich sein?

✂ **Aufgabe 9.14** Bestimmen Sie jeweils **präzise** die Steigung der Geraden, die mit der x -Achse einen Winkel von

- a) 0° b) 30° c) 45° d) 60° e) 90°

bildet. (Nicht gewünscht ist das im Allgemeinen unpräzise Ablesen von Δx und Δy in einem Steigungsdreieck.)

Definition 9.4 Lineare Funktion

Eine **lineare Funktion** ist eine Funktion f , die in folgender Form geschrieben werden kann:

$$f(x) = mx + q$$

Dabei sind m und q geeignet gewählte reelle Zahlen.

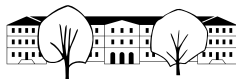
✂ **Aufgabe 9.15**

- a) Begründen Sie, warum der Graph einer linearen Funktion eine Gerade ist.
- b) Welcher Eigenschaft der Geraden entspricht m ?
- c) Wenn der Graph einer linearen Funktion gegeben ist, wo kann man q ablesen?
- d) Schreiben Sie möglichst wenig Text in die Box, damit die folgende falsche (warum?) Aussage korrekt wird!
 Jede Gerade im Koordinatensystem ist der Graph einer linearen Funktion.

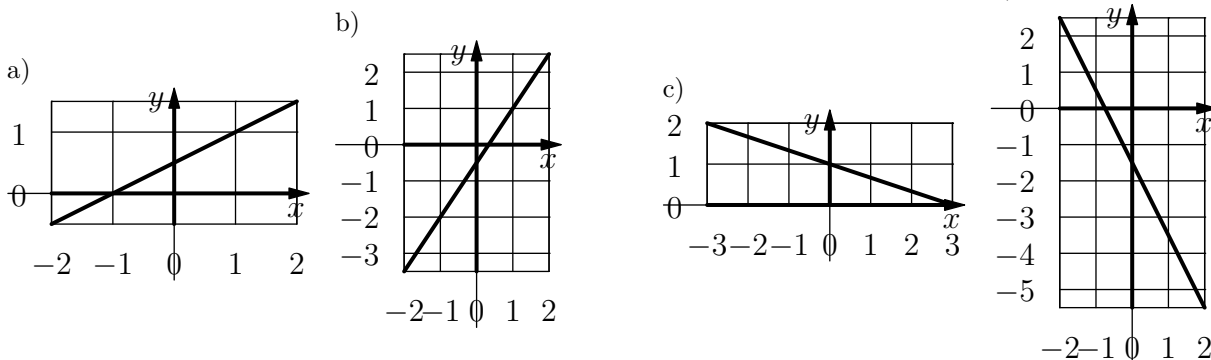
Definition 9.5 Steigung und Achsenabschnitt

Bei einer linearen Funktion $f(x) = mx + q$ ist m **die Steigung** und q **der y -Achsenabschnitt**.

✂ **Aufgabe 9.16** Finden Sie Beispiele aus dem Alltag für lineare Funktionen.



✂ **Aufgabe 9.17** Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der folgenden linearen Funktionen:



✂ **Aufgabe 9.18** Indem Sie sich zuerst überlegen, wie der Funktionsgraph aussehen kann, bestimmen Sie alle linearen Funktionen,

- a) die die Zahl 1 auf 3 und die Zahl 4 auf 2 abbilden.
- b) die das Intervall $[-1, 1]$ vollständig auf das Intervall $[0, 4]$ abbilden.
- c) die das Intervall $[0, 1]$ auf das Intervall $[1, 6]$ abbilden.
- d) die das Intervall $[1, 6]$ auf das Intervall $[0, 1]$ abbilden.
- e) die das Intervall $[0, 1]$ auf das Intervall $[a, b]$ abbilden (mit $a < b, a, b \in \mathbb{R}$).
- f) die das Intervall $[a, b]$ auf das Intervall $[0, 1]$ abbilden (mit $a < b, a, b \in \mathbb{R}$).
- g) die das Intervall $[a, b]$ auf das Intervall $[c, d]$ abbilden.

✂ **Aufgabe 9.19** Gegeben ist die lineare Funktion $f(x) = 2x - 1$.

- a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f .
- b) Zeichnen Sie die Senkrechte zum Graphen von f durch den Punkt $(-2, 2)$ und bestimmen Sie deren Funktionsgleichung in der Form $g(x) = mx + q$.
- c) Wie gross ist die Steigung einer Senkrechten zu einer Geraden mit Steigung $m = \frac{4}{3}$?

✂ **Aufgabe 9.20** Gegeben ist eine Gerade g mit Steigung m . Berechnen Sie die Steigung m_{\perp} einer Senkrechten zu g .

✂ **Aufgabe 9.21** Gegeben sind zwei lineare Funktionen $f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$ und $g(x) = \frac{3}{2}x + 1$.

- a) Zeichnen Sie die beiden Graphen von f und g in ein gemeinsames Koordinatensystem. **Einheitslänge: 6 Häuschen.**
- b) Lesen Sie die ungefähren Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden ab.
- c) Berechnen Sie die exakten Koordinaten des Schnittpunktes.
Hinweis: Im Schnittpunkt sind die Funktionswerte beider Funktionen gleich.

**Merke**

Die Schnittpunkte der Graphen zweier Funktionen f und g erhält man, indem man die Gleichung

$$f(x) = g(x)$$

nach x (der x -Koordinate eines Schnittpunktes) auflöst. Sind f und g lineare Funktionen, ist die Gleichung selbst linear und kann einfach gelöst werden.

✳ **Aufgabe 9.22** Gegeben sind die Punkte $A = (-2, -1)$ und $B = (3, 1)$ sowie die Steigung $m = \frac{3}{2}$ der Geraden b durch den Punkt A . Gesucht sind die Koordinaten des Punktes C auf b , für den das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig ist.

- Konstruieren Sie das Dreieck und lesen Sie die ungefähren Koordinaten von C ab.
- Berechnen Sie die exakten Koordinaten von C .

✳ **Aufgabe 9.23** Gegeben sind zwei Punkte $A = (-3, 1)$ und $B = (2, -2)$. Finden Sie die Koordinaten der Punkte C und D oberhalb von AB , für die $ABCD$ ein Quadrat ist.

✳ **Aufgabe 9.24** Finden Sie ganzzahlige Koordinaten für die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks so, dass die Hypotenuse parallel zur x -Achse ist und das Dreieck nicht gleichschenkelig ist.

Bestimmen Sie dann die Koordinaten der Eckpunkte der Quadrate über den Dreiecksseiten.

Betrachten Sie das Quadrat über der Seite b . Das Quadrat soll kontinuierlich (als Animation) in ein Parallelogramm überführt werden, wobei die Seite b fix bleibt und die andere Seite am Schluss senkrecht auf der Hypotenuse steht (wie im dritten Beweis des Satzes von Pythagoras bzw. dem Beweis des Kathetensatzes, der Pythagoras sofort mit beweist). Finden Sie zwei lineare Funktionen, die als Eingabe eine Zahl (alias Zeit) im Intervall $[0, 1]$ entgegennehmen und als Ausgabe die x - bzw. y -Koordinate eines „interessanten“ Eckpunktes des Parallelogramms produzieren, d. h. für 0 das Quadrat und für 1 das Parallelogramm.

Hintergrund: In POV-Ray gibt es eine Variable `clock`, die von 0 bis 1 läuft und das Erzeugen von Animationen erlaubt. Mit den obigen Funktionen kann diese Animation programmiert werden.

9.8 Repetition

Funktion: Eine Funktion ordnet jedem Element einer Definitionsmenge \mathbb{D} (meistens ist das Element eine reelle Zahl) ein Element einer Wertemenge \mathbb{W} (meistens ist dieses Element wieder eine reelle Zahl) zu.

Diese Zuordnung kann auch als Maschine aufgefasst werden, die für jede Eingabe (Element aus der Definitionsmenge) eine Ausgabe (Element der Wertemenge) produziert.

Wir werden fast ausschliesslich Funktionen antreffen, die durch einfache Funktionsgleichungen (Formeln) dargestellt werden können. Die Funktionsgleichung gibt an, wie aus der Eingabe (meist durch die Variable x dargestellt) die Ausgabe berechnet werden kann.

Beispiele: $a(x) = 2x - 3$, $b(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $c(x) = |x + 2|$

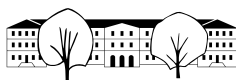
Funktionsgraph: Sind Definitions- und Wertemenge Zahlen, kann der Funktionsgraph einer Funktion f im x/y -Koordinatensystem gezeichnet werden. Für jede mögliche Eingabe x wird der Punkt (x, y) gezeichnet, dessen y -Koordinate die Ausgabe der Funktion ist, also $y = f(x)$. Die Koordinaten der Punkte des Graphen sind also $(x, f(x))$ für alle möglichen Werte von x .

Transformation von Graphen: Wird zu einer Funktion eine konstante Zahl **addiert**, bzw. subtrahiert, **verschiebt** sich der Graph entsprechend in y -Richtung nach oben, bzw. nach unten.

Wird die gesamte Funktion mit einer konstanten Zahl **multipliziert**, wird der Graph in y -Richtung **gestreckt** oder gestaucht (und zusätzlich gespiegelt, wenn die Zahl negativ ist).

Lineare Funktion: Eine Funktion ist linear, wenn die Funktionsgleichung auf die Form $f(x) = m \cdot x + q$ gebracht werden kann. Der Graph einer linearen Funktion ist eine **Gerade**.

- Die Zahl m ist dann die **Steigung** und gibt an, um wie viele y -Einheiten die Gerade pro x -Einheit



ansteigt (bei negativem m fällt die Gerade). Für zwei beliebige verschiedene Punkte auf der Geraden (und das zugehörige **Steigungsdreieck** darunter) gilt:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

wobei Δx bzw. Δy die vorzeichenbehafteten **Differenzen** der x - bzw. y -Koordinaten der beiden Punkte sind.

Die Steigung m_{\perp} einer Geraden, die senkrecht auf einer Geraden mit Steigung m steht, ist

$$m_{\perp} = -\frac{1}{m}.$$

Das Steigungsdreieck wird um 90° gedreht, was zur Folge hat, dass sich Δx und Δy vertauschen und eines davon das Vorzeichen ändert.

- Die Zahl q ist der **y -Achsenabschnitt** (= y -Koordinate des Schnittpunkts der Geraden mit der y -Achse). Beachte dazu: Wegen $f(0) = m \cdot 0 + q = q$ ist $(0, q)$ ein Punkt der Geraden.

Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen: Gegeben sind zwei Funktionen f und g . Ist x die x -Koordinate eines Schnittpunkts der Funktionsgraphen, so muss $f(x) = g(x)$ gelten. Gilt umgekehrt $f(x) = g(x)$ für ein Argument x , so ist der Punkt $(x, f(x)) = (x, g(x))$ ein Schnittpunkt der beiden Funktionsgraphen.

Die x -Koordinaten der Schnittpunkte erhält man somit durch Lösen der Gleichung

$$f(x) = g(x)$$

Die y -Koordinaten der Schnittpunkte erhält man durch Einsetzen der gefundenen x -Koordinaten in eine der beiden Funktionen.

9.8.1 Standardaufgaben

✂ **Aufgabe 9.25** Gegeben sind die Punkte $A = (-2, 1)$, $B = (1, -2)$ und $C = (3, 1)$.

- Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen für die Geraden $a = BC$, $b = AC$ und $c = AB$.
- Gilt $a \perp c$?
- Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Höhe h_a (dies ist die Gerade durch A , die senkrecht auf a steht).
- Bestimmen Sie den Höhenfusspunkt $H_a (= a \cap h_a)$.

✂ **Aufgabe 9.26** Zeichnen Sie den Graphen folgender Funktionen in je ein Koordinatensystem. Bestimmen Sie zuerst Definitions- und Wertebereich, um nur den benötigten Teil des Koordinatensystems zu zeichnen.

- | | | |
|------------------------------|------------------------|-----------------------|
| a) $a(r) = -\sqrt{r}$ | b) $b(q) = \sqrt{-q}$ | c) $c(s) = - s $ |
| d) $d(t) = \frac{1}{2}t - 2$ | e) $e(u) = \sqrt{ u }$ | f) $f(v) = v - 2$ |
| g) $g(w) = w^2 - 2$ | h) $h(y) = 2 - y^2$ | i) $i(x) = 1 - x $ |

9.8.2 Vertiefungs- und Reflexionsaufgaben

✂ **Aufgabe 9.27** Von einer unbekanntem Funktion f weiss man, dass $f(-1) = -1$, $f(0) = -2$ und $f(2) = 2$.

- Auf wie viele Arten kann der Graph von f vervollständigt werden? Zeichnen Sie eine Variante.
- Ausgehend von Ihrer Variante, zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $g(x) = f(x) + 2$, $h(x) = -f(x)$ und $k(x) = f(x + 2)$.
- *) Finden Sie eine mögliche Funktionsgleichung für f . Wer findet mehr als eine mögliche Formel?

✂ **Aufgabe 9.28** Gegeben sind die beiden linearen Funktionen $f(x) = 2x - 1$ und $g(x) = 2x + 1$.

- Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen.
- Messen Sie den Abstand der beiden Geraden (in Einheiten, nicht in cm!).
- Berechnen Sie den exakten Abstand der beiden Geraden.
- *) Berechnen Sie den Abstand zweier Geraden mit Steigung m und Unterschied der Achsenabschnitte Δq .



✂ **Aufgabe 9.29** Wahr oder falsch? Begründen Sie und korrigieren Sie falls möglich falsche Aussagen in sinnvolle wahre Aussagen.

- Für zwei beliebige Punkte in der x/y -Ebene gibt es immer eine lineare Funktion, deren Graph durch diese Punkte geht.
- Haben zwei Geraden die gleiche Steigung, so sind sie parallel.
- Haben zwei Geraden den gleichen y -Achsenabschnitt q , so schneiden sie sich auf der x -Achse.
- Gegeben ist eine lineare Funktion $f(x) = mx + q$. Ersetzt man sowohl m als auch q durch ihre Gegenzahlen, wird der Graph an der y -Achse gespiegelt.
- Die Steigung einer horizontalen Geraden ist nicht definiert.
- Die Steigung der Winkelhalbierenden der Koordinatenachsen ist 1.
- Die Steigung einer vertikalen Geraden ist 2.
- Das Produkt der Steigungen zweier rechtwinkliger Geraden ist -1 .
- Erhöht man die Steigung einer Geraden um 2, so verschiebt sich die Gerade um 2 Einheiten in y -Richtung.
- Wenn f eine lineare Funktion ist, dann ist auch $h(x) = 2 \cdot f(x)$ eine lineare Funktion.
- Gegeben sind zwei lineare Funktionen f und g . Die Funktion $h(x) = f(x) + g(x)$ ist dann ebenfalls eine lineare Funktion.
- Wenn f und g lineare Funktionen sind, dann ist auch $h(x) = f(g(x))$ eine lineare Funktion.
- Wenn f eine lineare Funktion ist, dann ist auch $g(x) = f(x) \cdot f(x)$ eine lineare Funktion.
- Die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x + 2$ schneiden sich in den Punkten $(-1, 1)$ und $(2, 4)$.
- Die Graphen der Funktionen $f(x) = (x + 1)^2 - 1$ und $g(x) = (x - 1)^2 + 1$ schneiden sich in genau einem Punkt.
- Die Graphen der Funktionen $f(x) = (x - 1)^2 + 1$ und $g(x) = 1 - 2x$ schneiden sich in zwei Punkten.
- Die Summe $h(x) = f(x) + g(x)$ zweier nicht-linearer Funktionen f und g ist nie linear.
- Das Produkt $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ zweier linearer Funktionen f und g ist nie linear.
- Der Abstand zweier Geraden ist gleich dem Unterschied der y -Achsenabschnitte.
- Für beliebiges x liegt der Punkt $(f(x), x)$ auf dem Graphen der Funktion f .
- Dr. Blöchligers Notenskala ist eine lineare Funktion der Punktzahl.
- Die Zeit, die benötigt wird, um von einem Ort zu einem anderen zu gelangen, ist eine lineare Funktion der Entfernung der beiden Orte.

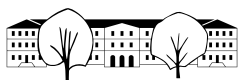
✂ **Aufgabe 9.30** Gegeben sind 4 Funktionen:

$$f(x) = x^2 - 2x, \quad g(x) = \sqrt{5 - x}, \quad h(x) = |x - 2|, \quad k(x) = \frac{3}{x}.$$

Bestimmen Sie die (maximalen) Definitionsbereiche für diese Funktionen. Für g und h bestimmen Sie ebenfalls die Wertebereiche.

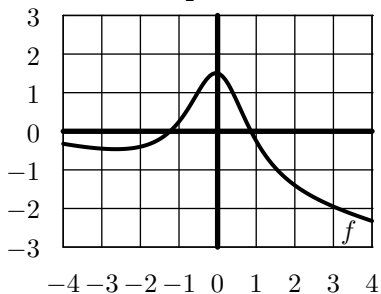
Berechnen Sie und vereinfachen Sie soweit wie möglich:

- | | | | |
|------------------------------|---|-------------------|------------------------|
| a) $f(7)$ | b) $g(1)$ | c) $h(-2)$ | d) $k(-1)$ |
| e) $h(f(1))$ | f) $k(g(-31))$ | g) $g(-h(f(-1)))$ | h) $g(-(f(4) + h(4)))$ |
| i) $k(a) \cdot f(a)$ | j) $f(a + b) + k(\frac{1}{a+b}) + h(1)$ | | |
| k) $f(a + 1) \cdot k(a - 1)$ | l) $h(x^2 + 2)$ | | |

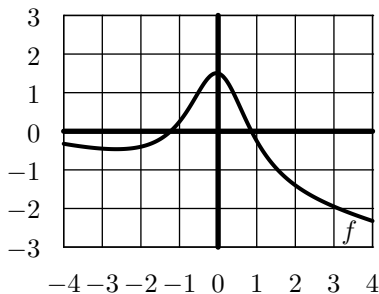


✂ **Aufgabe 9.31** Gegeben ist eine (bzw. sind zwei) Funktion(en) f (und g) durch ihre(n) Graphen. Skizzieren Sie jeweils den Graphen der angegebenen Funktion h :

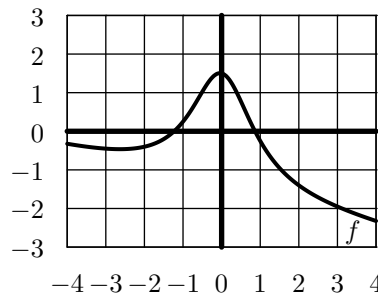
a) $h(x) = f(x) + \frac{3}{2}$



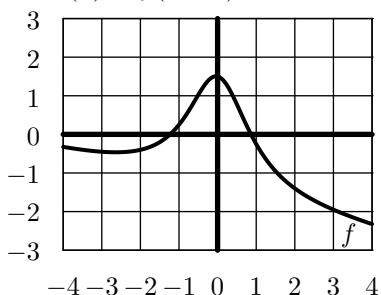
b) $h(x) = -2 \cdot f(x)$



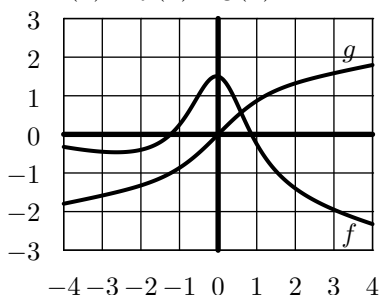
c) ✂ $h(x) = f(-x)$



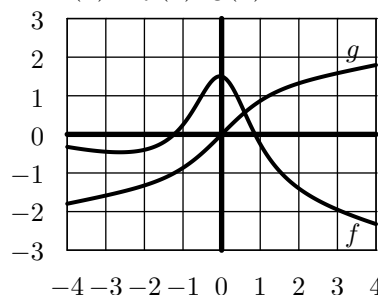
d) ✂ $h(x) = f(x - 1)$



e) ✂ $h(x) = f(x) + g(x)$



f) ✂ $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

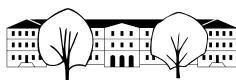


✂ **Aufgabe 9.32** Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2x + q$, wobei q jeweils einen der drei Werte -2 , -1 und 0 annehmen soll.

- a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f und g für die drei Werte von q . Wie viele Schnittpunkte erwarten Sie in den drei Fällen?
- b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Taschenrechners die Schnittpunkte der Funktionsgraphen.
- c*) Formen Sie die drei Schnittpunktgleichungen so um, dass die Anzahl der Lösungen ersichtlich wird.

✂ **Aufgabe 9.33** Gegeben sind die zwei Funktionen $f(x) = \frac{3}{4} \sqrt{|x|}$ und $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

- a) Was ist der (maximale) Definitions- und (minimale) Wertebereich der Funktion g ?
- b) Mit Hilfe des Taschenrechners, skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und $-g(x)$ im gleichen Koordinatensystem. Wählen Sie als Einheitslänge mindestens 4cm (8 Häuschen).
- c) Skizzieren Sie dann (zuerst von Hand) die Graphen der Funktionen $h_1(x) = f(x) + g(x)$ und $h_2(x) = f(x) - g(x)$ mit roter Farbe.



9.9 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

- ✂ Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".
- ✳ Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**
- ✂ Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

✂ Lösung zu Aufgabe 9.1 ex-zahlmengen-und-intervalle-akrobatik

- a) Wahr.
- b) Falsch. $\mathbb{R}_0^- = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$ oder $\mathbb{R}^- = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_0^+$ wäre wahr.
- c) Wahr.
- d) Falsch. $\mathbb{Q}_0^+ \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ oder $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}^+$ wäre wahr.
- e) Wahr.
- f) Falsch. Dazu sehe ich keine offensichtliche kleine Änderung (ausser = durch \neq zu ersetzen ;-).

✳ Lösung zu Aufgabe 9.2 ex-betrag-als-wurzel-des-quadrats

Im Fall $x \geq 0$ gilt $|x| = x = \sqrt{x^2}$. Die erste Gleichung gilt nach Definition des Betrags, die zweite nach Definition der Wurzel einer nicht-negativen Zahl als derjenigen nicht-negativen Zahl, deren Quadrat die Zahl unter dem Wurzelzeichen ist.

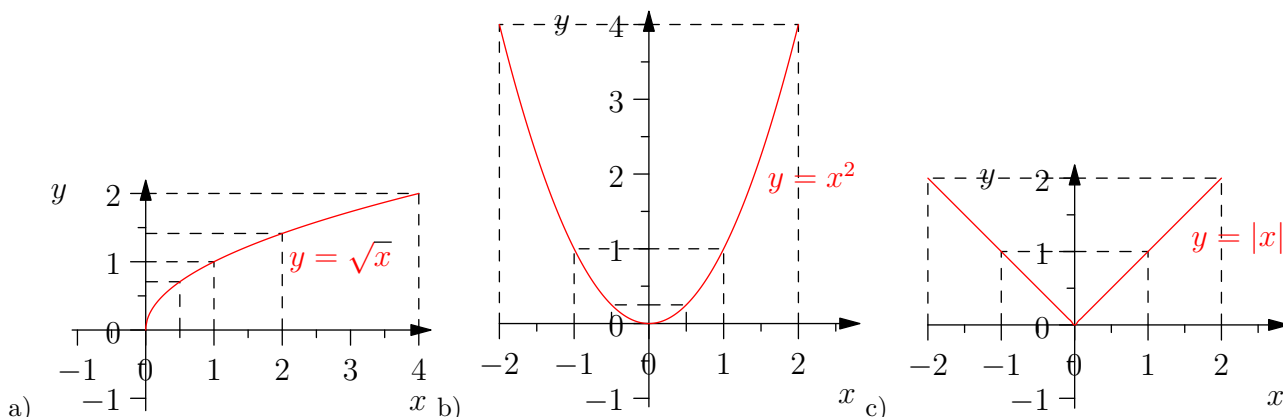
Im Fall $x < 0$ gilt ähnlich $|x| = -x = \sqrt{x^2}$.

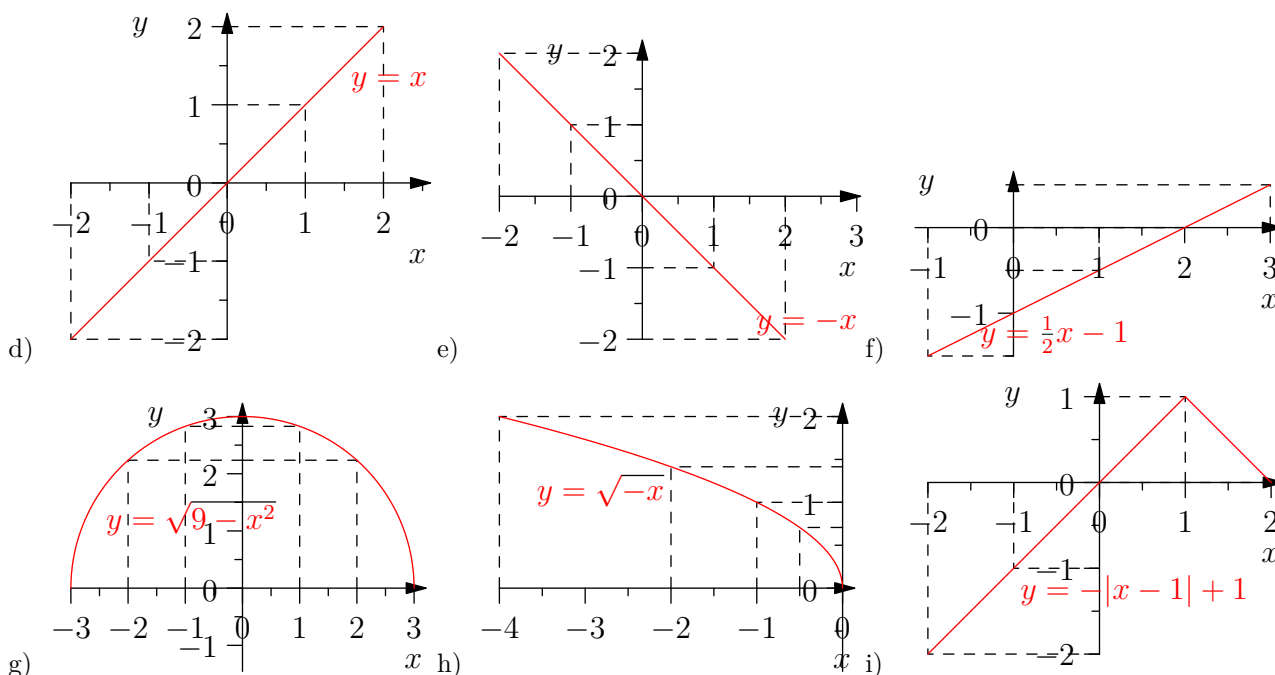
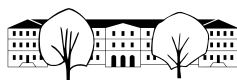
✂ Lösung zu Aufgabe 9.3 ex-fallstrecke-und-geschwindigkeit

t	0	1	2	3
$z(t)$	0	-4.905	-19.62	-44.145
$v(t)$	0	-9.81	-19.62	-29.43

✂ Lösung zu Aufgabe 9.5 ex-funktionen-zeichnen

Die Definitions- und Wertebereiche werden nach den Zeichnungen erklärt.





Zu den Definitionsbereichen: In die Ausdrücke für die Funktionen b, c, d, e, f und i kann man alle reellen Zahlen als Argumente einsetzen. Dies bedeutet, dass der Definitionsbereich dieser Funktionen jeweils $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ ist.

Bei Teilaufgabe (a) darf man nur nicht-negative reelle Zahlen einsetzen, der Definitionsbereich ist also $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$.

Bei Teilaufgabe (g) muss der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen nicht-negativ sein, damit der Ausdruck definiert ist. Der Definitionsbereich von g ist also die Menge aller reellen Zahlen w , für die $9 - w^2 \geq 0$ gilt (oder äquivalent $(3 - w)(3 + w) \geq 0$). Wir bestimmen diese Menge wie im Abschnitt „7.4.1 Vorzeichen von Produkten und Quotienten“ erklärt und erhalten als Definitionsbereich von g die Menge $\mathbb{D} = [-3, 3]$.

Bei Teilaufgabe (h) muss $-y \geq 0$ gelten, damit die rechte Seite definiert ist. Der Definitionsbereich ist somit $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^-$.

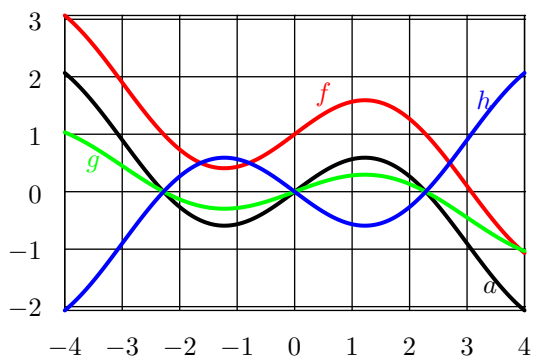
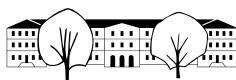
Zu den Wertebereichen: Die Funktionen a, b, c und h haben offensichtlich den Wertebereich $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$. Die Funktionen d, e und f haben den Wertebereich $\mathbb{W} = \mathbb{R}$. Die Funktion g hat den Wertebereich $\mathbb{W} = [0, 3]$. Die Funktion i hat den Wertebereich $\mathbb{W} =] - \infty, 1]$.

✂ Lösung zu Aufgabe 9.6 ex-funktionen-ablesen

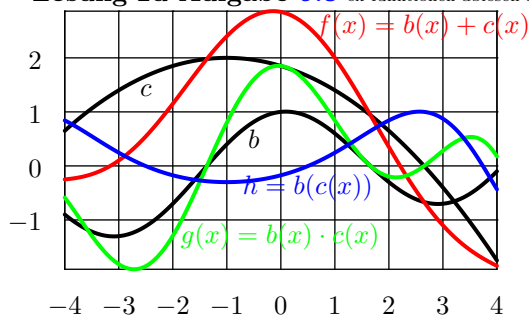
$f(-4) \approx 1.7$	$g(-4) \approx 1.4$	$h(-4) \approx -1.5$
$f(-3) \approx 0$	$g(-3) \approx 1.2$	$h(-3) \approx -0.8$
$f(-2) \approx -1.7$	$g(-2) \approx 1$	$h(-2) \approx 0$
$f(-1) \approx -1.7$	$g(-1) \approx 0.7$	$h(-1) \approx 2$
$f(0) \approx 0$	$g(0) \approx 0.4$	$h(0) \approx 0$
$f(1) \approx 1.7$	$g(1) \approx 0$	$h(1) \approx -0.8$
$f(2) \approx 1.7$	$g(2) \approx -1$	$h(2) \approx -1.5$
$f(3) \approx 0$	$g(3)$ nicht definiert	$h(3) \approx -2$
$f(4) \approx -1.7$	$g(4)$ nicht definiert	$h(4) \approx -2.5$

Die ungefähren Funktionswerte sind:

✂ Lösung zu Aufgabe 9.7 ex-funktionen-ablesen-transformieren



✂ Lösung zu Aufgabe 9.8 ex-funktionen-ablesen-addieren-multiplizieren



✂ Lösung zu Aufgabe 9.9 ex-funktionen-transformieren

- a) Graph von z um 2 Einheiten nach oben verschieben.
- b) Graph von z um 1 Einheit nach unten verschieben.
- c) Graph von z um $|v|$ Einheiten nach oben (wenn $v \geq 0$) oder unten (wenn $v < 0$) verschieben.
- d) Graph von z um Faktor 2 in y -Richtung strecken. D. h. alle Punkte auf dem Graphen sind danach doppelt so weit von der x -Achse entfernt.
- e) Graph von z um Faktor $\frac{1}{2}$ in y -Richtung strecken. D. h. alle Punkte auf dem Graphen sind danach halb so weit von der x -Achse entfernt.
- f) Graph von z wird an der x -Achse gespiegelt.
- g) Graph von z wird an der x -Achse gespiegelt und mit Faktor 2 in y -Richtung gestreckt. (Bzw. einfach mit Faktor -2 an der x -Achse gestreckt.)

✂ Lösung zu Aufgabe 9.10 ex-graph-identitaet

Der Graph ist die erste Winkelhalbierende. Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ gehört der Punkt $(x, i(x)) = (x, x)$ zum Graph. Dieser liegt auf der ersten Winkelhalbierenden (denn man erreicht ihn vom Ursprung, indem man x Einheiten nach rechts und nach oben geht). Jeder Punkt auf der ersten Winkelhalbierenden hat diese Form.

Wer sich über die Formulierung der Aufgabe wundert: Bisher haben wir beim Zeichnen von Graphen meist nur endlich viele Punkte berechnet und dann den Rest „geraten“. Das obige Argument beschreibt den Graph ohne Raten.

✂ Lösung zu Aufgabe 9.11 ex-lineare-funktionen-zeichnen

Ausgehend vom Graphen der Funktion $i(x) = x$ (die Winkelhalbierende zwischen der positiven x - und y -Achse), können die Graphen durch Streckung (und gegebenenfalls anschliessender Verschiebung) als Geraden gezeichnet werden.

- a) Graph von i mit Faktor 3 in y -Richtung gestreckt. Ergibt eine Gerade durch den Nullpunkt, die um 3 y -Einheiten pro x -Einheit ansteigt.
- b) Der Graph von $i(x)$ wird mit Faktor 3 in y -Richtung gestreckt.
- c) Graph von i an der x -Achse gespiegelt. Ergibt die «andere Winkelhalbierende».



- d) Graph von c mit Faktor $\frac{1}{2}$ gestreckt. Gerade durch den Nullpunkt, fällt um 1 y -Einheit pro 2 x -Einheiten.
 e) Graph von i um 1 Einheit nach unten verschoben.
 f) Graph von c um 1 Einheit nach oben verschoben.
 g) Gerade durch den Punkt $(0, -2)$, die pro x -Einheit um 2 y -Einheiten ansteigt.
 h) Gerade durch den Punkt $(0, \frac{2}{3})$, die pro 3 x -Einheiten um eine y -Einheit abfällt.

✂ **Lösung zu Aufgabe 9.12** ex-geraden-verschiedener-steigungen

Die Ursprungsgerade mit Steigung $-\frac{1}{4}$ ist die Gerade durch den Ursprung $(0, 0)$ und den Punkt $(1, -\frac{1}{4})$ (oder äquivalent durch den Ursprung und den Punkt $(4, -1)$). Die anderen gesuchten Ursprungsgeraden konstruiert man analog.

✂ **Lösung zu Aufgabe 9.13** ex-steigung-gerade-A-B

Die Steigung ist $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ (oder, was dasselbe ist, $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$).

Die x -Koordinaten müssen verschieden sein, damit der Nenner von Null verschieden ist.

✂ **Lösung zu Aufgabe 9.14** ex-spezielle-steigungen

Hinweis: In der Lösung hier werden nur positive Steigungen berechnet. Spiegelt man die Geraden an der x -Achse bleibt der Winkel gleich, die Steigung wird aber negativ. D. h. zu allen Aufgaben ist auch die entsprechend negative Steigung eine Lösung.

- a) Die Steigung ist 0.
 b) Man zeichnet ein 30° - 60° - 90° Stützdreieck, z. B. so, dass die Hypotenuse 1 ist. Dann sind die Katheten $\frac{1}{2}$ (y -Differenz) und $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (x -Differenz). Die Steigung ist somit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dots = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- c) Steigung 1.
 d) Wie in b), einfach x und y vertauschen, also ist die Steigung $\sqrt{3}$.
 e) Die Steigung ist nicht definiert, denn Division durch Null ist nicht definiert. (Genau genommen hätte man diesen Fall in der Definition der Steigung ausschliessen müssen.) Die Steigung wäre quasi ∞ .

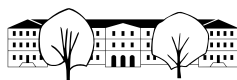
✂ **Lösung zu Aufgabe 9.15** ex-graph-linearer-funktion

- a) Der Graph der Funktion $g(x) = mx$ ist die Gerade durch den Ursprung und den Punkt $(1, m)$. Verschiebt man diese Gerade um q nach oben, so erhält man wieder eine Gerade. Diese ist der Graph von $f(x) = mx + q$.
 b) Die Zahl m ist die Steigung dieser Geraden. Formal kann man dies so sehen: Die Punkte $A = (0, q)$ und $B = (1, m + q)$ gehören zum Graph von f . Die Differenz der x -Werte dieser beiden Punkte ist $\Delta x = 1 - 0 = 1$, die der y -Werte $\Delta y = m + q - q = m$. Also ist die Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{m}{1} = m$.
 c) Wegen $f(0) = m \cdot 0 + q = q$ ist $(0, q)$ der Schnittpunkt unserer Geraden mit der y -Achse. Also ist q die y -Koordinate dieses Schnittpunkts bzw. mit anderen Worten: Unsere Gerade schneidet die y -Achse bei q .
 Vgl.: In der nachfolgenden Definition wird q deswegen als *y -Achsenabschnitt* bezeichnet.
 d) Jede nicht vertikale Gerade im Koordinatensystem ist der Graph einer linearen Funktion.

✂ **Lösung zu Aufgabe 9.16** ex-lineare-funktionen-alltagsbeispiele

Einige Beispiele:

- Wenn eine Tonne Weizen 328 Franken kostet, so kosten x Tonnen Weizen $f(x) = 328x$ Franken.
- Ist p der Kilopreis einer Ware in Franken, so kosten x Kilogramm dieser Ware $f(x) = px$ Franken.



- Beträgt die Anmelde-Gebühr in einem Club 100 Franken und die monatliche Gebühr 30 Franken, so zahlt man für die ersten x Monate Mitgliedschaft insgesamt $k(x) = 30x + 100$ Franken.
- Fährt ein Velofahrer mit einer Geschwindigkeit v in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, so legt er in t Stunden eine Strecke von $s(t) = vt$ Kilometern zurück.
- Ein gängige Formel zur Notenberechnung lautet $n(p) = 1 + 5 \frac{p}{m} = \frac{5}{m}p + 1$, wobei m die maximal erreichbare Punktzahl ist und p die erreichte Punktzahl.

✂ Lösung zu Aufgabe 9.17 ex-lineare-funktionen-ablesen

- a) y -Achsenabschnitt $q = \frac{1}{2}$. Steigung $m = \frac{1}{2}$ (z. B. mit den Punkten $(-1, 0)$ und $(1, 1)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$). Also $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
- b) y -Achsenabschnitt $q = -\frac{1}{2}$. Steigung $m = \frac{3}{2}$ (z. B. mit den Punkten $(-1, -2)$ und $(1, 1)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{2}$). Also $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.
- c) y -Achsenabschnitt $q = 1$. Steigung $m = -\frac{1}{3}$ (z. B. mit den Punkten $(0, 1)$ und $(3, 0)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{3}$). Also $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$.
- d) y -Achsenabschnitt $q = -\frac{3}{2}$. Steigung $m = -2$ (z. B. mit den Punkten $(-1, \frac{1}{2})$ und $(1, -\frac{7}{2})$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{2}$). Also $f(x) = -2x - \frac{3}{2}$.

✂ Lösung zu Aufgabe 9.18 ex-intervalle-abbilden

- a) $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$
- b) $f(x) = 2x + 2$ und $f(x) = -2x + 2$
- c) $f(x) = 5x + 1$ und $f(x) = -5x + 6$
- d) $f(x) = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(x - 1)$ und $f(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{6}{5} = -\frac{1}{5}(6 - x)$
- e) $f(x) = (b - a) \cdot x + a$ und $f(x) = (a - b) \cdot x + b$
- f) $f(x) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{1}{b-a} \cdot x - \frac{a}{b-a}$ und $f(x) = \frac{x-b}{a-b} = -\frac{1}{b-a} \cdot x + \frac{b}{b-a}$
- g) $f(x) = \frac{x-a}{b-a} \cdot (d - c) + c$ und $f(x) = \frac{b-x}{b-a} \cdot (d - c) + c$

Aufgabe g) kann wie folgt aufgefasst werden:

- (a) Erst das Intervall verschieben: $f_1(x) = x - a$. Damit bildet man das Intervall $[a, b]$ auf $[0, b - a]$ ab.
- (b) Das verschobene verkleinert man auf das Intervall $[0, 1]$, indem man durch seine Länge dividiert, also $f_2(x) = \frac{x-a}{b-a}$. Damit bildet man auf $[0, 1]$.
- (c) Man vergrößert das Intervall auf die endgültige Länge, durch Multiplikation mit $(d - c)$, also $f_3(x) = \frac{x-a}{b-a} \cdot (d - c)$.
- (d) Am Schluss verschiebt man das Intervall an die endgültige Lage, durch Addition von c : $f_4(x) = f(x) = \frac{x-a}{b-a} \cdot (d - c) + c$.

Die zweite Funktion erhält man fast gleich, ausser dass man im ersten Schritt zusätzlich zum Verschieben das Intervall noch umdreht mit $f_1(x) = b - x$.

✂ Lösung zu Aufgabe 9.19 ex-rechtwinklige-geraden

- a)
- b) $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$
- c) Für eine Gerade mit Steigung $\frac{4}{3}$ kann ein Stützdreieck mit Katheten $\Delta x = 3$ und $\Delta y = 4$ gezeichnet werden. Dieses Dreieck wird um 90 Grad gedreht. Das neue Stützdreieck der Senkrechten hat die Katheten vertauscht, wobei eine noch das Vorzeichen wechselt. Die neue Steigung ist also $-\frac{3}{4}$.



✳️ Lösung zu Aufgabe 9.21 ex-schnittpunkt

Wenn x die x -Koordinate des Schnittpunktes ist, gilt

$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x) \\
 -\frac{1}{3}x - 1 &= \frac{3}{2}x + 1 && | \cdot 6 \\
 -2x - 6 &= 9x + 6 && | + 2x - 6 \\
 -12 &= 11x && | : 11 \\
 -\frac{12}{11} &= x
 \end{aligned}$$

Eingesetzt in eine der Funktionen: $f\left(-\frac{12}{11}\right) = \frac{12}{33} - 1 = -\frac{7}{11}$. Zur Kontrolle (nicht wirklich nötig) eingesetzt in g : $g\left(-\frac{12}{11}\right) = -\frac{36}{22} + 1 = -\frac{7}{11}$.

Und damit sind die Koordinaten des Schnittpunktes: $\left(-\frac{12}{11}, -\frac{7}{11}\right)$

✳️ Lösung zu Aufgabe 9.22 ex-rechtwinkliges-dreieck-konstruieren

Vorgehen: Zuerst werden die Funktionsgleichungen der Geraden b und $a = BC$ bestimmt. Dann wird der Schnittpunkt bestimmt.

Geradengleichung von b (Steigung $\frac{3}{2}$): $b(x) = \frac{3}{2}x + q_b$. Es gilt $A \in b$: Setzt man die x -Koordinate von A in die Funktion b ein, erhält man die y -Koordinate von A :

$$\begin{aligned}
 b(-2) &= -1 \\
 \frac{3}{2} \cdot -2 + q_b &= -1 \\
 -3 + q_b &= -1 && | + 3 \\
 q_b &= 2
 \end{aligned}$$

Die Gerade a ist rechtwinklig zu b , hat also die Steigung $-\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$. Es gilt $B \in a$, also

$$\begin{aligned}
 a(3) &= 1 \\
 -\frac{2}{3} \cdot 3 + q_a &= 1 \\
 -2 + q_a &= 1 && | + 2 \\
 q_a &= 3
 \end{aligned}$$

Es ist also der Schnittpunkt der Geraden $a(x) = -\frac{2}{3}x + 3$ und $b(x) = \frac{3}{2}x + 2$ zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
 -\frac{2}{3}x + 3 &= \frac{3}{2}x + 2 && | - 2 + \frac{2}{3}x \\
 1 &= \frac{13}{6}x && | \cdot \frac{6}{13} \\
 \frac{6}{13} &= x
 \end{aligned}$$

Die y -Koordinate des Schnittpunktes erhält man durch Einsetzen (in a oder b):

$$a\left(\frac{6}{13}\right) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{13} + 3 = \frac{35}{13}$$

Kontrolle (eigentlich unnötig):

$$b\left(\frac{6}{13}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{13} + 2 = \frac{35}{13}$$

Damit sind die Koordinaten von $C = \left(\frac{6}{13}, \frac{35}{13}\right) \approx (0.4615, 2.6923)$.

✳️ Lösung zu Aufgabe 9.23 ex-koordinaten-quadrat

Das Stützdreieck unter $[AB]$ hat die Katheten $\Delta x = 5$ und $\Delta y = -3$. Dreht man das Stützdreieck um 90° und hängt es bei A und B an, erhält man die Punkte C und D , d. h. $C = (2 + 3, -2 + 5) = (5, 3)$ und $D = (-3 + 3, 1 + 5) = (0, 6)$.



✚ Lösung zu Aufgabe 9.24 ex-koordinaten-rechtw-dreieck

In der POV-Ray Datei sind am Anfang folgende Variablen definiert:

- x_a (in POV-Ray `xa`): Die x -Koordinate vom Punkt A .
- x_b (in POV-Ray `xb`): Die x -Koordinate vom Punkt B .
- m_b (in POV-Ray `mb`): Die Steigung der Seite b .

Aus diesen Variablen werden sukzessive alle weiteren Grössen berechnet.

Geraden b und a und der Punkt C

Die Gerade b hat folgende Funktionsgleichung:

$$f_b(x) = m_b \cdot x + q_b$$

wobei q_b im Moment noch unbekannt ist. Da der Punkt $A = (x_a, 0)$ auf b liegt, gilt folgende Gleichung (die dann nach q_b aufgelöst wird):

$$\begin{array}{rcl} f(x_a) = 0 & & \\ m_b \cdot x_a + q_b = 0 & & | - m_b \cdot x_a \\ q_b = -m_b \cdot x_a & & \end{array}$$

Damit lässt sich in POV-Ray die Variable q_b wie folgt definieren:

```
#declare qb = -mb*xa;
```

Die Steigung der Gerade a lässt sich aus der Steigung der Geraden b berechnen, da diese rechtwinklig aufeinander stehen. Es gilt für rechtwinklige Steigungen m und m_{\perp} :

$$m_{\perp} = -\frac{1}{m}$$

also

$$m_a = -\frac{1}{m_b}$$

oder in POV-Ray Code ausgedrückt:

```
#declare ma = -1/mb;
```

Für den Achsenabschnitt q_a verfährt man genau gleich wie bei q_b . Es gilt:

$$q_a = -m_a \cdot x_b$$

Für den Schnittpunkt $C = a \cap b$ mit x -Koordinate x_c gilt:

$$\begin{array}{rcl} f_a(x_c) = f_b(x_c) & & \\ m_a \cdot x_c + q_a = m_b \cdot x_c + q_b & & | - q_a - m_b \cdot x_c \\ x_c(m_a - m_b) = q_b - q_a & & | : (m_a - m_b) \\ x_c = \frac{q_b - q_a}{m_a - m_b} & & \end{array}$$

also

```
#declare xc = (qb-qa)/(ma-mb);
```

Die y -Koordinate y_c von C erhält man durch Einsetzen:

$$x_c = f_a(x_c) = m_a \cdot x_c + q_a$$

also

```
#declare yc = ma*xc+qa;
```

Punkte A_b und C_b



Man zeichnet das Steigungsdreieck für die Gerade b an den Punkten A und C . Man dreht das Dreieck um 90° um A im Gegenuhrzeigersinn. Man subtrahiert also von der x -Koordinate von a den y -Unterschied zwischen A und C , d. h. $x_a - (y_c - 0)$. Zur y -Koordinate von A wird der x -Koordinatenunterschied zwischen A und C addiert, d. h. $0 + (x_c - x_a)$. Als POV-Ray Code:

```
#declare Ab=<xa-yc, xc-xa, 0>;
```

Die Gleichen Koordinatenunterschiede werden den Koordinaten von C hinzugerechnet, also:

```
#declare Ab=<xc-yc, yc+xc-xa, 0>;
```

Punkte Abtop, Cbtop und Cbbottom

Zuerst ermittelt man die Funktionsgleichung der Parallelen b_2 zu b durch A_b . Die Steigung ist die gleiche, nämlich m_b . Der Achsenabschnitt kann entweder wie am Anfang berechnet werden, oder man sieht ein, dass der vertikale Abstand genau der Seite c entspricht. Man erhält auf beide Weisen $q_{b_2} = q_b + (x_b - x_a)$ oder in POV-Ray Code:

```
#declare q2b=qb+(xb-xa);
```

Man kennt die x -Koordinaten (x_a , bzw. x_c). Durch einsetzen in die Funktionsgleichung f_b erhält man die y -Koordinaten. Oder man sieht ein, dass der Abstand der Punkte A und $A_{b_{top}}$ gleich der Seite c ist, also sind die y -Koordinaten $0 + (x_c - x_a)$, bzw. $y_c + (x_c - x_a)$. In POV-Ray Code:

```
#declare Abtop=<xa,xc-xa,0>;
```

und

```
#declare Cbtop=<xc,yc+xc-xa,0>;
```

Die Koordinaten von $C_{b_{bottom}}$ sind x_c für x und c für y wobei $c = x_c - x_a$. Also

```
#declare Cbbottom=<xc,xc-xa,0>;
```

✂ Lösung zu Aufgabe 9.25 ex-geraden-durch-punkte

a) Steigungen $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$: $m_a = \frac{3}{2}$, $m_b = 0$, $m_c = -1$.

Achsenabschnitte: Ein Punkt auf der Geraden in die Funktionsgleichung mit unbekanntem q einsetzen, nach q auflösen. Beispiel für die Gerade a :

$$\begin{aligned} f_a(1) &= -2 \\ m_a \cdot 1 + q_a &= -2 \\ \frac{3}{2} + q_a &= -2 && | - \frac{3}{2} \\ q_a &= -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Entsprechend $q_b = 1$, $q_c = -1$ und damit

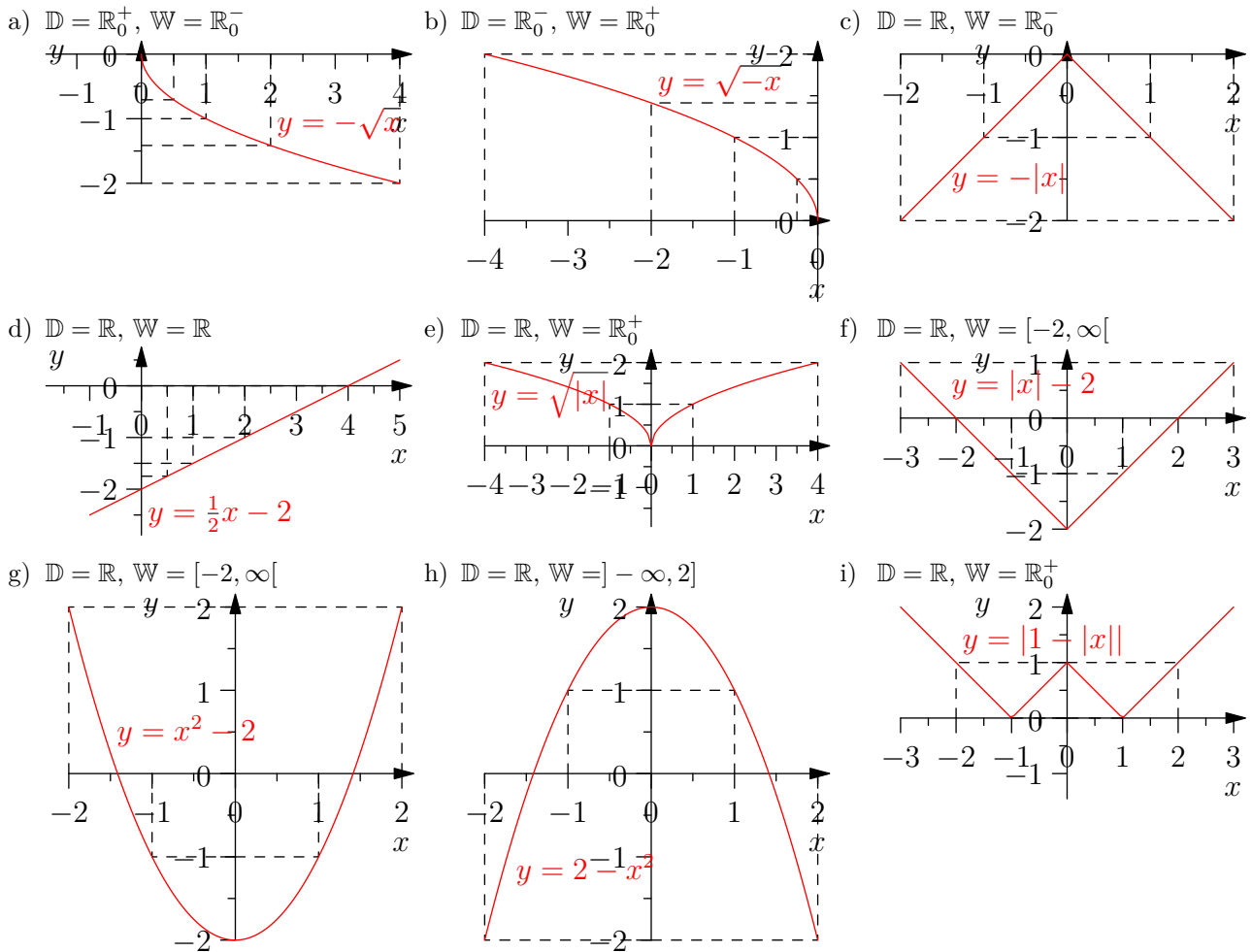
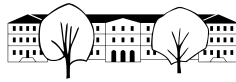
$$f_a(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} \quad f_b(x) = 1 \quad f_c(x) = -x - 1$$

b) Nein, da $m_a \neq -\frac{1}{m_c}$

c) $f_h(x) = m_h \cdot x + q_h$ mit $m_h = -\frac{1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$. q_h erhält man durch Einsetzen der Koordinaten von A und Auflösen nach q_h . Resultat: $f_h(x) = -\frac{3}{2} \cdot x - \frac{1}{3}$.

d) Auflösen der Gleichung $f_a(x) = f_h(x) \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{3}$ liefert $x = \frac{19}{13}$. Eingesetzt erhält man $y = f_a\left(\frac{19}{13}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{19}{13} - \frac{7}{2} = -\frac{34}{26} = -\frac{17}{13}$

✂ Lösung zu Aufgabe 9.26 ex-funktionsgraphen-zeichnen



✂ Lösung zu Aufgabe 9.27 ex-transformation-unbekannte-funktion

- a) Nur die Werte für $x = -1, 0$ und 2 sind bestimmt. Alle anderen Werte sind frei wählbar. Es gibt also unendlich viele solche Graphen (diese Unendlichkeit ist sogar noch grösser als jene der reellen Zahlen, wenn der Funktionsgraph nicht eine durchgehende Linie sein muss).
- b) g : Der Graph wird um 2 Einheiten nach oben verschoben. h : der Graph wird an der x -Achse gespiegelt. k : der Graph wird um zwei Einheiten **nach links** verschoben (die Eingabe ist quasi zwei Einheiten zu früh).
- c) Nice try...

✂ Lösung zu Aufgabe 9.28 ex-abstand-paralleler-geraden

c) Eine Möglichkeit besteht darin, die Konstruktion rechnerisch nachzuvollziehen. Es wird also eine Rechtwinklige mit beiden Geraden geschnitten, z. B. die Gerade mit der Funktionsgleichung $k(x) = -\frac{1}{2}x$. Man löst die Gleichungen $f(x) = k(x)$ und $g(x) = k(x)$ und erhält den Schnittpunkt mit f $(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$ und mit g : $(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$. Der Abstand der beiden Punkte beträgt $\sqrt{(\frac{4}{5})^2 + (\frac{2}{5})^2} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 5}{5^2}} = \frac{2}{5} \sqrt{5} \approx 0.89443$

d) Seien $f(x) = mx$ und $g(x) = mx - q$. Die Gleichung einer Rechtwinkligen Gerade ist $k(x) = -\frac{1}{m}x$. Der Schnittpunkt mit f ist $(0, 0)$, der Schnittpunkt mit g ist $(\frac{q}{m+\frac{1}{m}}, -\frac{q}{m^2+1})$. Der Abstand der beiden Punkte ist also $\sqrt{(\frac{q}{m+\frac{1}{m}})^2 + (\frac{q}{m^2+1})^2} = \sqrt{(\frac{qm}{m^2+1})^2 + (\frac{q}{m^2+1})^2} = \sqrt{\frac{q^2(m^2+1)}{(m^2+1)^2}} = \frac{q\sqrt{m^2+1}}{m^2+1} = \frac{q}{\sqrt{1+m^2}}$

✂ Lösung zu Aufgabe 9.29 ex-wahr-oder-falsch

- a) **Falsch**. Das gilt nicht wenn die Punkte vertikal übereinander liegen (gleiche x -Koordinate, unterschiedliche y -Koordinaten). Um die Aussage wahr zu machen, könnte man «...Punkte mit unterschiedlichen x -Koordinaten...» schreiben.



- b) **Wahr.** Der einzige Streitpunkt hier ist, ob man identische (übereinander liegende) Geraden ebenfalls als parallel bezeichnet.
- c) **Falsch.** Sie schneiden sich auf der y -Achse.
- d) **Falsch.** Die neue Funktion ist einfach $g(x) = -f(x)$, also an der x -Achse gespiegelt.
- e) **Falsch.** Die Steigung ist Null.
- f) **Wahr.** 1 y -Einheit pro x -Einheit.
- g) **Falsch.** Vertikale Geraden haben keine definierte Steigung (wäre quasi unendlich).
- h) **Wahr.** $m \cdot -\frac{1}{m} = -1$.
- i) **Falsch.** Richtig wäre z. B. «Erhöht man den y -Achsenabschnitt um 2...».
- j) **Wahr.** $h(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot (mx + q) = 2m \cdot x + 2q$.
- k) **Wahr.** $f(x) = m_f x + q_f$, $g(x) = m_g x + q_g$, also $h(x) = (m_f + m_g)x + (q_f + q_g)$.
- l) **Wahr.** Wie in **k**) erhält man $h(x) = f(m_g x + q_g) = m_f \cdot (m_g x + q_g) + q_f = m_f m_g \cdot x + (m_f q_g + q_f)$.
- m) **Falsch.** Z. B. für $f(x) = x$ und $g(x) = x$ ist $h(x) = x^2$ nicht linear.
- n) **Wahr.** Überprüfen durch einsetzen der x -Koordinaten in die Funktionen.
- o) **Wahr.** Die Gleichung $f(x) = g(x)$ vereinfacht sich auf eine lineare Gleichung (x^2 fällt weg) und die hat genau eine Lösung (der Koeffizient von x ist nicht Null).
- p) **Falsch.** Man kann z. B. die Graphen zeichnen, oder die Gleichung $f(x) = g(x)$ umformen, um $x^2 = -1$ zu finden, was keine Lösung hat.
- q) **Falsch.** Z. B. $f(x) = x^2$ und $g(x) = x - x^2$. Die Summe ist $h(x) = x$ linear.
- r) **Falsch.** Das Produkt genau dann ein lineare Funktion, wenn in mindestens einer Funktion die Steigung gleich Null ist (und damit der quadratische Term weg fällt).
- s) **Falsch.** Das ist nur wahr, wenn die Geraden horizontal sind.
- t) **Falsch.** Der Punkt $(x, f(x))$ liegt auf dem Graphen. Man könnte auch noch monieren, dass x aus dem Definitionsbereich kommen muss.
- u) **Falsch.** Die Skala ist linear bis zur für die Note 6 benötigte Punktzahl. Dort macht der Graph einen Knick, Noten über 6 werden nicht gemacht. Genau genommen setzt sich die Skala aus zwei linearen Funktionen zusammen.
- v) **Falsch.** Das würde eine konstante Durchschnittsgeschwindigkeit (=Steigung!) voraussetzen, was nicht realistisch ist.

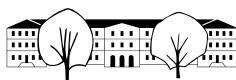
✂ Lösung zu Aufgabe 9.30 ex-funktionen-auswerten

Definitionsbereiche: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathbb{D}_g =]-\infty, 5]$, $\mathbb{D}_h = \mathbb{R}$, $\mathbb{D}_k = \mathbb{R}^*$ (alles ausser 0).

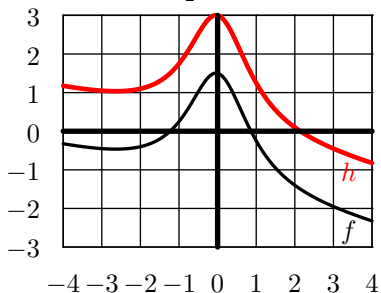
Wertebereiche: $\mathbb{W}_f = [-1, \infty]$, $\mathbb{W}_g = \mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{W}_h = \mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{W}_k = \mathbb{R}^*$.

- a) 35 b) 2 c) 4 d) -3
- e) $h(-1) = 3$ f) $k(6) = \frac{1}{2}$ g) $g(-h(3)) = g(-1) = \sqrt{6}$ h) $g(-(8+2)) = g(-10) = \sqrt{15}$
- i) $\frac{3}{a} \cdot (a^2 - 2a) = 3(a-2)$ j) $(a+b)^2 - 2(a+b) + 3(a+b) + 1 = (a+b)^2 + (a+b) + 1$ k) $(a+1) \cdot (a-1) \cdot \frac{3}{a-1} = 3(a+1)$ l) $|x^2| = x^2$

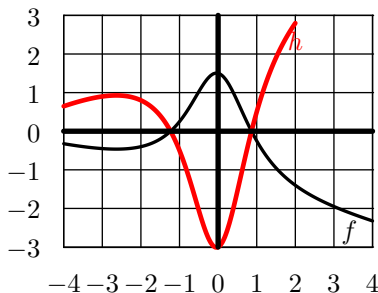
✂ Lösung zu Aufgabe 9.31 ex-graphen-abslesen-manipulieren



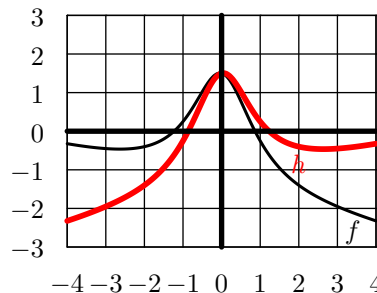
a) $h(x) = f(x) + \frac{3}{2}$



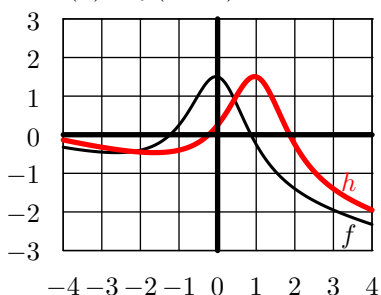
b) $h(x) = -2 \cdot f(x)$



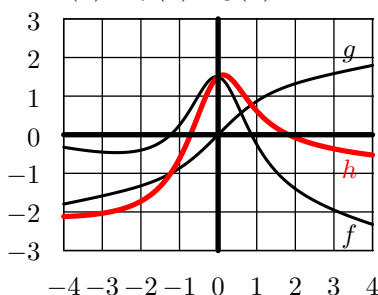
c) $h(x) = f(-x)$



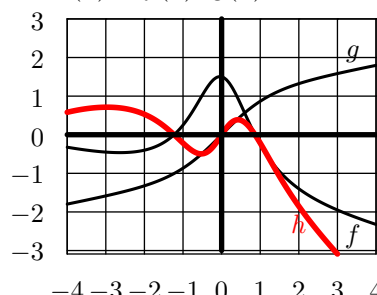
d) $h(x) = f(x - 1)$



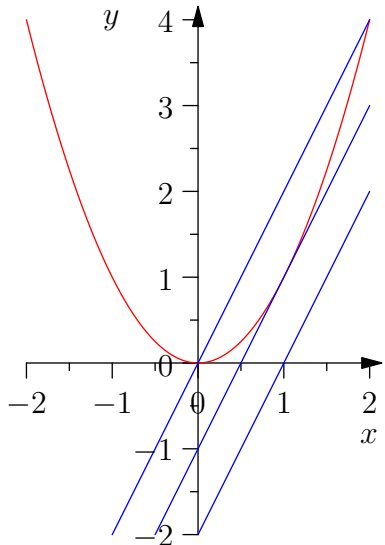
e) $h(x) = f(x) + g(x)$



f) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$



✳ Lösung zu Aufgabe 9.32 ex-funktionen-tr



b) `solve(x*x=2*x-2,x)` liefert `false`, d.h. eine falsche Aussage, d.h. es gibt kein x für das diese Gleichung wahr wäre. Es gibt also keinen Schnittpunkt für $q = -2$.

Für $q = -1$ erhält man die Lösung $x = 1$ und damit den (einzig) Schnittpunkt $(1, 1)$.

für $q = 0$ erhält man 2 Lösungen, $x = 0$ und $x = 2$, also die Schnittpunkte $(0, 0)$ und $(2, 4)$.

c) Für $q = -2$ kann die Gleichung auf die Form $x^2 - 2x + 1 = -1$ gebracht werden, wobei die linke Seite ein Binom ist, also $(x - 1)^2 = -1$. Ein Quadrat kann aber nie negativ sein, darum hat diese Gleichung keine Lösung.

Für $q = -1$ kann die Gleichung auf die Form $(x - 1)^2 = 0$ gebracht werden. Es gibt nur eine einzige Zahl, die quadriert 0 ergibt, nämlich 0 selbst. Also ist $x = 1$ die einzige Lösung.

Für $q = 0$ kann die Gleichung auf die Form $x(x - 2) = 0$ gebracht werden. D. h. entweder ist $x = 0$ oder $(x - 2) = 0$.

✳ Lösung zu Aufgabe 9.33 ex-funktionen-tr2

a) Die Zahl unter der Wurzel darf nicht negativ sein, also ist $\mathbb{D} = [-1, 1]$. Der Wertebereich ist $[0, 1]$.



b) und c):

