



### 13 Potenzen mit *rationalen* Exponenten

Erinnerung: Bei einer **Potenz**  $x^y$  heisst  $x$  **Basis** und  $y$  **Exponent**.

Bisher wurden nur Potenzen mit *ganzzahligen* Exponenten definiert. Für solche Potenzen kennen wir bereits die folgenden Potenzgesetze.

**Merke 13.1** Potenzgesetze (für ganzzahlige Exponenten)

Für alle reellen Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  und alle *ganzen* Zahlen  $m, n \in \mathbb{Z}$  als Exponenten gelten die folgenden Potenzgesetze:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Daraus lassen sich die folgenden Gesetze ableiten:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$$

#### 13.0.1 Potenzen mit rationalen Exponenten

Wir möchten nun auch Potenzen mit *rationalen* Exponenten definieren – und zwar so, dass die obigen Gesetze auch für solche Exponenten gültig bleiben.

✂ **Aufgabe 13.1**

- a) Finden Sie heraus, wie  $5^{\frac{1}{2}}$  definiert werden sollte, damit die Potenzgesetze weiterhin gültig sind.  
*Hinweis: Potenzieren Sie mit einem geeigneten natürlichen Exponenten, damit etwas Bekanntes entsteht.*
- b) Welche Eigenschaft muss die Zahl  $7^{\frac{1}{3}}$  haben?
- c) Wie kann  $11^{\frac{2}{5}}$  beschrieben werden?
- d) Begründen Sie, warum man  $5^{\frac{1}{2}}$  nicht als  $-\sqrt{5}$  definieren kann. *Hinweis: Betrachten Sie dazu  $\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^2$ .*

**Definition 13.1** «Wurzel ist hoch  $\frac{1}{2}$ »

Für jede nicht-negative reelle Zahl  $a \in \mathbb{R}_0^+$  definieren wir:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

**Definition 13.2**  $n$ -te Wurzeln

Für jede nicht-negative reelle Zahl  $a \in \mathbb{R}_0^+$  ist die  **$n$ -te Wurzel aus  $a$** , geschrieben als  $\sqrt[n]{a}$  oder  $a^{\frac{1}{n}}$ , als diejenige nicht-negative Zahl definiert, die mit  $n$  potenziert  $a$  ergibt.

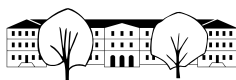
$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Mit anderen Worten ist  $\sqrt[n]{a}$  die nicht-negative Lösung der Gleichung  $x^n = a$ .

**Beachte:**  $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$  und  $\sqrt[3]{a} = a$ .

**Beachte:** Die  $n$ -te Wurzel ist nur für nicht-negative Zahlen definiert und selbst nicht-negativ.

✂ **Aufgabe 13.2** Skizzieren Sie in einem Koordinatensystem mit Einheit 10 Häuschen, das den  $x$ -Bereich  $[0, 2]$  und  $y$ -Bereich  $[0, 1.5]$  abdeckt, die Graphen der Funktionen  $\sqrt[n]{x}$  für  $n = 2, 3, 4, 5$ . *Beachten Sie, dass alle Graphen bei  $(0, 0)$  eine vertikale Tangente haben!*



Sie dürfen gerne Hilfsmittel benutzen (TR, GeoGebra, etc.), um die Koordinaten möglichst weniger, aber geeigneter Punkte zu bestimmen, die Sie dann in Ihren Graphen übertragen.

✂ **Aufgabe 13.3**

- a) Finden Sie in der folgenden Liste alle Werte, die gleich  $\sqrt[5]{7^3}$  sind:  
 $\sqrt[3]{5^7}, \sqrt[3]{5^7}, \sqrt[3]{7^5}, \sqrt[3]{7^5}, \sqrt[5]{3^7}, \sqrt[5]{3^7}, \sqrt[5]{7^3}, \sqrt[5]{7^3}, \sqrt[7]{3^5}, \sqrt[7]{3^5}, \sqrt[7]{5^3}$  und  $\sqrt[7]{5^3}$ .  
 Sie dürfen einen Taschenrechner verwenden (müssen aber nicht).
- b) Zeigen Sie: Die dritte Potenz von  $\sqrt[3]{a^5}$  ist  $a^5$ . Folgern Sie daraus, dass  $\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[3]{a^5}$ .
- c) Zeigen Sie allgemeiner: Die  $n$ -te Potenz von  $\sqrt[n]{a^m}$  ist  $a^m$ . Folgern Sie daraus, dass  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$ .

✂ **Aufgabe 13.4**

- a) Diesmal ohne Taschenrechner. Welche Werte in folgender Liste sind gleich  $\sqrt[5]{7^3}$ ?  
 $\sqrt[10]{7^6}, \sqrt[10]{14^6}, \sqrt[15]{7^9}, \sqrt[6]{8^4}$ .  
 Zeigen Sie Gleichheit oder Ungleichheit, indem Sie die Werte geschickt potenzieren.
- b) Zeigen Sie, dass  $\sqrt[5]{7^3} = \sqrt[5n]{7^{3n}}$  für alle positiven natürlichen Zahlen  $n$ .
- c) Zeigen Sie, dass  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$  für alle positiven natürlichen Zahlen  $n, m, k$  und alle  $a \in \mathbb{R}_0^+$  gilt.

**Definition 13.3** Potenzen mit *rationalen* Exponenten

Für jedes  $a \in \mathbb{R}_0^+$  und jedes  $q \in \mathbb{Q}$  (schreibe  $q = \frac{z}{n}$  mit  $z \in \mathbb{Z}$  und  $n \in \mathbb{N}^*$ ) definieren wir  $a^q = a^{\frac{z}{n}}$  wie folgt:

$$a^q = a^{\frac{z}{n}} \stackrel{\text{Definition}}{=} (a^z)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^z} \stackrel{\text{Aufgabe 13.3 (c)}}{=} (\sqrt[n]{a})^z = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^z$$

**Beachte:** Ob die rationale Zahl  $q$  gekürzt ist oder nicht, spielt nach Aufgabe 13.4 (c) keine Rolle.  
**Beachte:** Potenzen mit rationalen Exponenten sind **nur für nicht-negative Basen** definiert.

Wer ganz genau ist: Im Fall  $a = 0$  muss  $q \neq 0$  gelten, d.h.  $z \neq 0$ , denn  $0^0$  ist nicht definiert.

Man kann zeigen (siehe Aufgabe 13.5), dass die Potenzgesetze für *rationale* Exponenten weiterhin gelten:

**Merke 13.2** Potenzgesetze (für rationale Exponenten)

Für alle nicht-negativen reellen Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}_0^+$  und alle *rationalen* Zahlen  $p, q \in \mathbb{Q}$  als Exponenten gelten die folgenden Potenzgesetze:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \qquad (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p \qquad (a^p)^q = a^{p \cdot q}$$

Daraus lassen sich die folgenden Gesetze ableiten:

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \qquad a^{-p} = \frac{1}{a^p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p$$

✂ **Aufgabe 13.5** Folgern Sie die Potenzgesetze für rationale Exponenten aus den Potenzgesetzen für ganzzahlige Exponenten und der Definition von Potenzen mit rationalen Exponenten.

✂ **Aufgabe 13.6** Vereinfachen Sie jeweils so weit wie möglich:

- a)  $x^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{2}{3}} x^{\frac{3}{5}}$
- b)  $x^{-\frac{3}{7}} x^{-2} x^{\frac{17}{7}}$
- c)  $(xy)^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}}$
- d)  $(z^{\frac{7}{3}})^{-\frac{2}{11}}$
- e)  $\left(x^{-\frac{5}{7}} y\right)^{\frac{7}{3}}$
- f)  $(z^{\frac{2}{7}} a)^{-\frac{7}{5}} a^{\frac{22}{5}} z^{\frac{2}{5}}$
- g)  $\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{7}{3}}}$



- h) Schreiben Sie als Produkt von Potenzen (ohne Bruchstrich):  $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{7}} \cdot \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{5}{3}}}$
- i) Schreiben Sie als Bruch von Produkten von Potenzen mit **positiven** Exponenten:  $\left(\frac{b}{ca}\right)^{-\frac{3}{7}} \cdot \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{-\frac{1}{5}}}$
- j)  $\left(\frac{1}{5-x}\right)^3 \cdot 5^{-2x}$
- k)  $\frac{(3x+y^2)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{3x+y^2}}$
- l)  $(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}} \cdot (a^2 + 2ab + b^2)^{-\frac{2}{3}}$
- m)  $a(a + b^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{b^2}{\sqrt{a+b^2}}$

✘ **Aufgabe 13.7** «Kreative Fehler»: Ein fiktiver kreativer Schüler behauptet, dass die folgenden Rechnungen für alle Belegungen der Variablen stimmen – dabei wimmelt es nur so von Fehlern.

Überlegen Sie sich bei jedem Fehler, welche Regel der Schüler irrtümlicherweise als richtig angenommen haben könnte (falls der Fehler nicht zu abstrus ist) und widerlegen Sie diese «Regel» durch ein **möglichst einfaches, explizites Gegenbeispiel**, in dem **als Exponenten** möglichst nur ganze Zahlen vorkommen.

- a)  $a^{-\frac{2}{3}} + b^{-\frac{2}{3}} = (a + b)^{-\frac{2}{3}}$
- b)  $a^{\frac{5}{3}} + a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5+1}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$
- c)  $a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{3}{7}} = a^{\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{7}} = a^{\frac{4}{7}}$
- d)  $(a^{-\frac{3}{2}} + a^{\frac{1}{2}})^2 = a^3 + a$
- e)  $\left(z^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{3}{5}} = z^{\frac{2+3}{5}} = z^{\frac{5}{5}} = z^1 = z$
- f)  $\frac{a^{\frac{4}{7}}}{b^{\frac{4}{7}}} = (a - b)^{\frac{4}{7}}$
- g)  $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^1}{b^1} = \frac{a}{b}$
- h)  $\frac{a^{-\frac{13}{7}}}{b^{\frac{4}{7}}} = \frac{a^{-\frac{13-4}{7}}}{b^{\frac{4-4}{7}}} = \frac{a^{\frac{9}{7}}}{b^{\frac{0}{7}}} = \frac{a^{\frac{9}{7}}}{1} = a^{\frac{9}{7}}$
- i)  $a\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(a\frac{2}{3}\right)^2$

**Merke 13.3** Wurzelgesetze (für Quadratwurzeln)

Für alle  $a, b \in \mathbb{R}_0^+$  und alle  $n \in \mathbb{Z}$  gelten:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad (\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$$

Achtung, beleidigen Sie Pythagoras nicht:

⚠  $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$  ⚠

✘ **Aufgabe 13.8**

- a) Folgern Sie aus den Potenzgesetzen für rationale Exponenten die drei Wurzelgesetze in der obigen Merkebox.
- b) Zeigen Sie durch explizite Angabe von mindestens drei Gegenbeispielen, dass  $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$  im Allgemeinen falsch ist.
- c) Warum genau wäre es eine Beleidigung für Pythagoras?
- d) Für welche reellen Zahlen  $a$  und  $b$  gilt die Gleichung  $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ?

**Merke 13.4** Wurzelgesetze (für  $n$ -te Wurzeln)

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $a, b \in \mathbb{R}_0^+$  und alle  $m \in \mathbb{Z}$  gelten:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Achtung:

⚠ Summen sind doof:  $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$  ⚠



✂ **Aufgabe 13.9**

- a) Folgern Sie aus den Potenzgesetzen für rationale Exponenten die drei Wurzelgesetze für  $n$ -te Wurzeln in der obigen Merkebox.
- b) Zeigen Sie, dass  $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$  gilt.

✂ **Aufgabe 13.10** Schreiben Sie das Resultat als eine einzige Potenz mit einem rationalem Exponenten. Empfehlung: Ersetzen Sie alle Wurzelausdrücke durch geeignete Potenzen.

Beispiel:  $\sqrt{x \cdot \sqrt{x}} = \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4}}$

- a)  $x^2 \cdot \sqrt{\sqrt{x}}$
- b)  $\sqrt{\sqrt{x^3}}$
- c)  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}}}$
- d)  $x^2 \cdot \frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{\frac{x}{\sqrt{\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x^5} \cdot x}$
- e)  $\frac{(\sqrt{x} \cdot x^{\frac{1}{4}})^3}{(\sqrt{x^3})^{\frac{1}{2}}}$
- f)  $\sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}}$

✂ **Aufgabe 13.11** Bei der temperierten Klavierstimmung ist das Verhältnis der Frequenzen zweier aufeinanderfolgender Halbtöne immer gleich (z.B. von e zu f). Für die Oktave (12 Halbtöne) ist das Frequenz-Verhältnis 1 : 2. Mit welchem Faktor  $\lambda$  muss die Frequenz eines Tones multipliziert werden, damit der Ton einen Halbton höher wird? *Hinweis: Tut man dies 12 Mal, erhält man eine Oktave, also eine Frequenz-Verdoppelung. Stellen Sie damit eine Gleichung für  $\lambda$  auf. Potenzieren Sie diese Gleichung mit einem geeigneten Exponenten (oder ziehen Sie eine geeignete Wurzel), um sie aufzulösen.*

✂ **Aufgabe 13.12** Vereinfachen Sie und schreiben Sie das Resultat als eine einzige Potenz von  $x$  mit rationalem Exponenten:

- a)  $\sqrt{\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[2]{x^5}}$
- b)  $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[8]{x^5}}}}$
- c)  $\left(\sqrt[5]{x^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{5}}$
- d)  $\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{x}}}$
- e)  $\frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{\sqrt[4]{x}}{\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[6]{x}}}}$
- f)  $\sqrt[n]{x \cdot \sqrt[n]{x \cdot \sqrt[n]{x \cdot \sqrt[n]{x}}}}$

✂ **Aufgabe 13.13**

- a) Die Schweizer Nationalbank gibt zur Zeit (November '16) Bundesanleihen mit einer Laufzeit von 42 Jahren heraus. Der gesamte Zins (mit Zinseszins über die 42 Jahre) beläuft sich auf 23.3%. Wie gross ist der jährliche Zinssatz?  
*Hinweis: Stellen Sie eine Gleichung für den jährlichen Zinssatz auf, isolieren Sie dann die Potenz und potenzieren Sie dann die Gleichung auf beiden Seiten mit einem geeigneten Exponenten. Siehe auch [http://www.snb.ch/de/ifor/finmkt/chmarket/id/finmkt\\_chmarket\\_fedbonds](http://www.snb.ch/de/ifor/finmkt/chmarket/id/finmkt_chmarket_fedbonds).*
- b) Mit welchem Streckfaktor  $\lambda$  muss ein Würfel gestreckt werden, damit sich sein Volumen halbiert? Anwendung: Ein Würfel mit Kantenlänge 10 cm hat ein Volumen von 1 l. Welche Kantenlänge hat ein Würfel von 0.5 l Volumen? Schätzen Sie, bevor Sie rechnen!
- c) Eine Quinte ist ein Tonabstand von 7 Halbtönen. Wird eine Violine nach Gehör gestimmt, werden die Quinten (Tonabstand zweier nebeneinander liegender Saiten) rein gestimmt («reine Stimmung»). Das Frequenzverhältnis ist genau  $3 : 2 = 1.5$ . Das Klavier hingegen ist temperiert gestimmt (siehe Aufgabe 13.11). Wenn man annimmt, dass das Kammer-a (a1) beider Instrumente auf genau 440 Hz gestimmt ist: Wie viel Prozent höher ist die Frequenz der reinen Quinte darüber (e2) gegenüber der temperierten Quinte?  
*Zusatzaufgabe: Mit Hilfe eines Computers (z.B. mit GeoGebra) schätzen Sie die Frequenz der entstehenden Schwebung ab, wenn beide Instrumente das e2 spielen. Können Sie diese Frequenz exakt berechnen?*



### 13.1 Normalform von Wurzeltermen

**Definition 13.4** Normalform

Ein Wurzelterm in Normalform sieht wie folgt aus:

$$q_0 + q_1\sqrt{n_1} + q_2\sqrt{n_2} + \dots + q_m\sqrt{n_m} \quad \text{mit } q_0, \dots, q_m \in \mathbb{Q} \text{ und } n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$$

wobei alle  $n_i$  voneinander verschieden und quadratfrei sind (d.h. sie haben keine Quadratzahl als Teiler).

**Merke 13.5** Normalform

- Wurzeln im Nenner: Erweitern. Beispiel  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ .
- Quadrate unter der Wurzel: Vorziehen. Beispiel  $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot \sqrt{3}$ .

✂ **Aufgabe 13.14** Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in Normalform.

*Hinweis: Die Primfaktorzerlegung kann helfen.*

- a)  $\sqrt{240}$                       b)  $\sqrt{35} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{21}$                       c)  $\sqrt{8} + \sqrt{32}$                       d)  $\sqrt{4000}$   
 e)  $\frac{6}{\sqrt{3}}$                       f)  $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{12}}$                       g)  $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{8} - \sqrt{6})$                       h)  $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

✂ **Aufgabe 13.15** Bringen Sie die folgenden Ausdrücke auf Normalform. Beispiel:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

- a)  $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$                       b)  $\frac{4}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$                       c)  $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$                       d)  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

### 13.2 Wurzelgleichungen

**Merke 13.6**

Wird eine Gleichung auf beiden Seiten **quadrirt**, so können neue Lösungen dazu kommen, die keine Lösung der ursprünglichen Gleichung sind.  
Es muss am Schluss also eine **Probe** gemacht werden.

Das Quadrieren beider Seiten einer Gleichung wird bisweilen **Gewinnumformung** oder **Aufpassumformung** genannt.

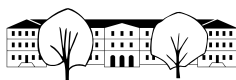
Die üblichen Gleichungsumformungen, die die Lösungsmenge nicht ändern, werden **Äquivalenzumformungen** genannt.

✂ **Aufgabe 13.16** Lösen Sie nach  $x$  auf:

- a)  $\sqrt{x+7} = 7$                       b)  $\sqrt{x+7} = -7$   
 c)  $\sqrt{x-3} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x+7}$                       d)  $\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x-3} = \sqrt{x+7}$

✂ **Aufgabe 13.17** Lösen Sie die Gleichungen mit folgender Lösungsstrategie: Nach dem ersten Quadrieren wird noch eine Wurzel übrigbleiben. Formen Sie dann die Gleichung so um, dass die Wurzel alleine auf einer Seite steht und quadrieren Sie nochmals.

- a)  $\sqrt{4x+5} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+4}$                       b)  $\sqrt{x-2} = \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}$



### 13.3 Berechnung von Wurzeln

**Aufgabe 13.18** Finden Sie ein Verfahren, um mit Hilfe eines Taschenrechners, aber **nur** unter Verwendung der Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division), die folgenden Wurzeln auf 5 Nachkommastellen genau zu bestimmen.

- a)  $\sqrt{378}$  19.442220952236                      b)  $\sqrt{9779}$  98.8888264668967

Beschreiben Sie Ihr Verfahren in einer Art Anleitung so genau, dass eine Mitschülerin es nachvollziehen könnte. Schätzen Sie ab, wie viele Rechenoperationen (bzw. Tastendrucke auf dem TR) Sie in etwa brauchen, um die 5 Nachkommastellen zu bestimmen. Schätzen Sie ab, wie viele Schritte Sie bräuchten, um 10 Nachkommastellen zu erhalten.

**Aufgabe 13.19** Berechnet man eine Wurzel, entspricht das der Berechnung der Quadratseite  $s$  eines Quadrates mit gegebenem Flächeninhalt  $A$ . Also  $s = \sqrt{A}$ .

Dazu geht man nun wie folgt vor:

**Schritt 1** Man schätze  $s$  (z.B. 1).

**Schritt 2** Man berechne die Seite  $b$  eines Rechtecks mit Fläche  $A$ , wenn die andere Seite  $s$  (die aktuelle Schätzung) ist.

**Schritt 3** Die Wurzel muss dazwischen (= zwischen den beiden Seitenlängen) liegen: Die neue Schätzung  $s$  ist der Durchschnitt von  $s$  und  $b$ .

**Schritt 4** Wenn die aktuelle Schätzung  $s$  nicht gut genug ist, gehe zu Schritt 2. Sonst Ende.

Wie viele Durchgänge brauchen Sie, um 5 Nachkommastellen zu bestimmen? Um 10 Nachkommastellen zu bestimmen?

**Aufgabe 13.20** Bestimmen Sie mit Hilfe eines Taschenrechners, aber **nur** unter Verwendung der Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division), die folgenden Wurzeln mit einer Genauigkeit von 5 Nachkommastellen.

- a)  $\sqrt[3]{10'974}$  22.22226481473318                      b)  $\sqrt[3]{37'037}$  33.333322222185  
c)  $\sqrt[4]{77'160}$  16.666639999936                      d)  $\sqrt[5]{5'292}$  5.555510427711303

**Aufgabe 13.21** Entwickeln Sie ein Verfahren wie in Aufgabe 13.19 für 3-te Wurzeln. Versuchen Sie, das Verfahren auf  $n$ -te Wurzeln zu verallgemeinern.

### 13.4 Potenzfunktionen

**Definition 13.5** Potenzfunktion

Eine Potenzfunktion ist eine Funktion, die in der Form

$$f(x) = a \cdot x^p$$

geschrieben werden kann mit  $a \in \mathbb{R}$  und  $p \in \mathbb{Q}$ .

**Merke 13.7** Definitionsbereich

Der Definitionsbereich einer Potenzfunktion hängt von  $p$  ab:

$p \in \mathbb{N}^+$ «N plus»	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	
$p \in \mathbb{Z}_0^-$ «Z Null minus»	$\mathbb{D} = \mathbb{R}^*$	$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$	(erste beiden Fälle: $p \in \mathbb{Z}$ )
$p \in \mathbb{Q}^+ \setminus \mathbb{N}$ «Q plus ohne N»	$\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$	$f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$	
$p \in \mathbb{Q}^- \setminus \mathbb{Z}$ «Q minus ohne Z»	$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$	$f(x) = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	(zweite beiden Fälle: $p \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ )



✂ **Aufgabe 13.22** Bestimmen Sie jeweils die Parameter  $a$  und  $p$  der folgenden Potenzfunktionen. Die Funktionsterme müssen zum Teil erst umgeformt werden.

a) $f(x) = 3x^4$	b) $f(x) = -x^2$	c) $f(x) = \frac{1}{2x^2}$	d) $f(x) = 1$
e) $f(x) = 0$	f) $f(x) = x$	g) $f(x) = -\sqrt{4x}$	h) $f(x) = \frac{9}{(-3x)^3}$

✂ **Aufgabe 13.23** Zeichnen Sie auf ein A4-Blatt ein Koordinatensystem mit Nullpunkt in der Blattmitte, das das Intervall  $[-1.5, 1.5]$  auf der  $x$ -Achse und das Intervall  $[-3, 3]$  auf der  $y$ -Achse abdeckt. Die Einheit soll etwa 4 cm betragen. Zeichnen Sie in dieses Koordinatensystem acht Graphen: Zeichnen Sie für jeden der Werte  $p = 1, p = 2, p = 3, p = -1, p = -2, p = \frac{1}{2}, p = \frac{1}{3}$  und  $p = -\frac{1}{2}$  den Graphen der Funktion  $f(x) = x^p$ .

✂ **Aufgabe 13.24** Für die Graphen der Potenzfunktionen, die Sie in Aufgabe 13.23 gezeichnet haben, berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Seiten des achsenparallelen Rechtecks, das durch die Punkte  $(-1.5, 3)$  und  $(1.5, -3)$  aufgespannt wird.

✂ **Aufgabe 13.25** Beschreiben Sie, wie folgende Funktionsgraphen für sehr grosse  $n \in \mathbb{N}$  aussehen:

a) $f(x) = x^n$ für gerade $n$	b) $f(x) = x^n$ für ungerade $n$	c) $f(x) = \sqrt[n]{x}$
d) $f(x) = x^{-n}$ für gerade $n$	e) $f(x) = x^{-n}$ für ungerade $n$	f) $f(x) = x^{-\frac{1}{n}}$

✂ **Aufgabe 13.26** Um die Helligkeit von LEDs zu regulieren, wird i.A. nicht der Strom durch die LED reguliert, da man dafür eine komplizierte Schaltung bräuchte, die überdies energetisch ineffizient wäre. Stattdessen wird die LED schnell ein- und ausgeschaltet. Je nach zeitlichem Anteil der Anschaltphase wird die LED verschieden hell wahrgenommen. Man spricht vom «Duty-Cycle». 0% heisst immer ausgeschaltet, 100% heisst immer eingeschaltet, 25% heisst z.B. während 250  $\mu\text{s}$  eingeschaltet und während 750  $\mu\text{s}$  ausgeschaltet (was einer Frequenz von 1 kHz entspricht).

Die menschliche Wahrnehmung der Lichtintensität ist nicht linear: Der wahrgenommene Helligkeitsunterschied zwischen 10% und 20% Duty-Cycle ist viel grösser als der zwischen 80% und 90%.

Sei  $x \in [0, 1]$  die wahrgenommene Intensität. Gesucht ist eine Funktion  $f(x)$ , die den passenden Duty-Cycle, ebenfalls  $\in [0, 1]$  liefert. Skizzieren Sie, wie die Funktion  $f(x)$  in etwa aussehen könnte. Wie könnte der Funktionsterm von  $f(x)$  konkret aussehen?

*Hinweis: Diese Art von Umrechnung zwischen energetischer und wahrgenommener Helligkeit wird in der digitalen Bildverarbeitung auch «Gammakorrektur» genannt (siehe online für mehr Information dazu).*

## 13.5 Repetitionsaufgaben

✂ **Aufgabe 13.27** Beweisen Sie die Potenzgesetze (siehe Merke-Box 13.1 «Potenzgesetze» auf Seite 1) für (positive Basen und) natürliche Exponenten, d.h. schreiben Sie einfach nachzuvollziehende Umformungen auf, die die Gesetze erklären.

✂ **Aufgabe 13.28** Repetieren Sie Aufgaben 13.6 und 13.10 und 13.12.

✂ **Aufgabe 13.29** Das Hypervolumen eines 4-dimensionalen Hyperwürfels mit Seitenlänge  $s$  ist  $s^4$ . Wie lange ist die Seitenlänge eines 4-dimensionalen Hyperwürfels mit Hypervolumen a)  $1 \text{ m}^4$  und b)  $0.5 \text{ m}^4$ ? c) Mit welchem Streckfaktor muss ein 4-dimensionaler Hyperwürfel gestreckt werden, damit sich sein Hypervolumen verhundertfacht?

✂ **Aufgabe 13.30** Ohne die Gleichungen zu lösen, begründen Sie, warum die folgenden Gleichungen keine Lösung haben. Betrachten Sie dazu z.B. die Vorzeichen der Seiten der Gleichungen (Positivität, Negativität), welche Werte für  $x$  auf beiden Seiten überhaupt in Frage kommen oder die folgende Tatsache: Wenn für beliebige positive Zahlen  $a$  und  $b$  die Ungleichung  $a < b$  gilt, dann gilt auch  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ .

a) $\sqrt{x+4} = -4$	b) $-\sqrt{x-5} = 5$	c) $\sqrt{x-4} = \sqrt{-x-4}$
d) $x^2 = -\sqrt{x+2}$	e) $\sqrt{x+1} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}$	f) $\sqrt{x-4} = 2-x$



### 13.6 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

- ✂ Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".
- ✳ Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**
- ✂ Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

✂ Lösung zu Aufgabe 13.1 ex-hoch-bruch-herleiten

a) Wenn man mit 2 potenziert erhält man, laut Potenzgesetzen:

$$\left(5^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 5^{-\frac{1}{2} \cdot 2} = 5^1 = 5$$

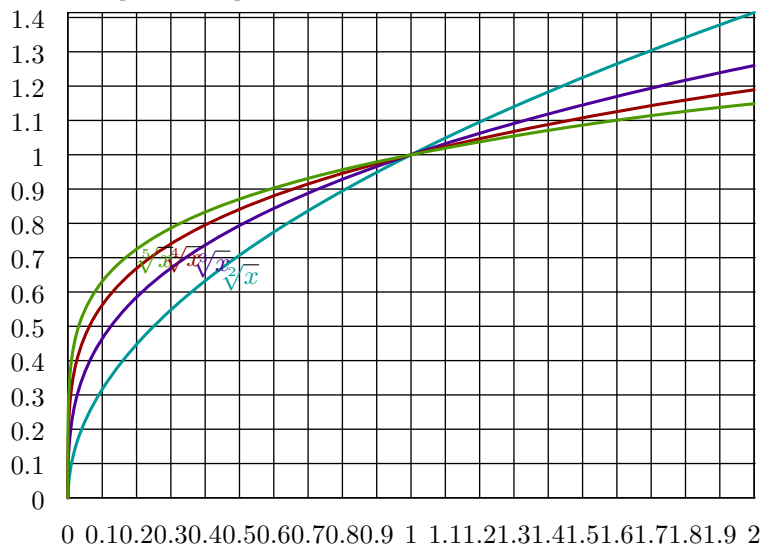
Also muss  $5^{-\frac{1}{2}}$  eine Zahl sein, die quadriert 5 ergibt, d.h.  $\sqrt{5}$  oder  $-\sqrt{5}$ . Warum  $-\sqrt{5}$  nicht geht, werden Sie in Teilaufgabe d) herausfinden.

b)  $7^{-\frac{1}{3}}$  muss jene Zahl sein, die hoch 3 gerechnet 7 ergibt, weil  $\left(7^{-\frac{1}{3}}\right)^3 = 7^{-\frac{3}{3}} = 7^1 = 7$ . Man spricht auch von der dritten Wurzel von 7.

c) Potenziert man die Zahl mit 5 erhält man  $11^2$ , weil  $\left(11^{-\frac{2}{5}}\right)^5 = 11^2$ .  
Also muss  $11^{-\frac{2}{5}}$  jene Zahl sein, deren fünfte Potenz  $11^2 = 121$  ist.

d) Die Rechnung  $\left(5^{-\frac{1}{4}}\right)^2 = 5^{-\frac{1}{4} \cdot 2} = 5^{-\frac{1}{2}}$  zeigt, dass  $5^{-\frac{1}{4}}$  ein Quadrat ist. Da jedes Quadrat positiv (oder eventuell Null) ist, muss  $5^{-\frac{1}{2}} = +\sqrt{5}$  gelten.

✂ Lösung zu Aufgabe 13.2 ex-nte-wurzeln-im-intervall-null-bis-zwei



✂ Lösung zu Aufgabe 13.3 ex-potenzen-von-nten-wurzeln





a) Wenn man die Werte einfach per Taschenrechner ausrechnet, erhält man:

$$\sqrt[3]{5^7} = \sqrt[3]{5^7} \approx 42.749, \sqrt[3]{7^5} = \sqrt[3]{7^5} \approx 25.615, \sqrt[5]{3^7} = \sqrt[5]{3^7} \approx 4.656, \sqrt[5]{7^3} = \sqrt[5]{7^3} \approx 3.214, \sqrt[7]{3^5} = \sqrt[7]{3^5} \approx 2.192, \sqrt[7]{5^3} = \sqrt[7]{5^3} \approx 1.993$$

Es gilt also nur  $\sqrt[5]{7^3} = \sqrt[5]{7^3}$ ; aber Achtung: Genaugenommen könnte es sein, dass diejenigen Stellen, die der Taschenrechner anzeigt, übereinstimmen, die Zahlen aber trotzdem verschieden sind!

Dass die Zahlen wirklich gleich sind, kann man einsehen, indem man die 5-ten Wurzeln «wegpotenziert»: Es gilt  $(\sqrt[5]{7^3})^5 = (\sqrt[5]{7})^{15} = (\sqrt[5]{7^5})^3 = 7^3$  und  $(\sqrt[7]{3^5})^5 = 7^3$ , d.h. die beiden Zahlen  $\sqrt[5]{7^3}$  und  $\sqrt[7]{3^5}$  haben dieselbe 5-te Potenz:

$$(\sqrt[5]{7^3})^5 = (\sqrt[7]{3^5})^5$$

Zieht man auf beiden Seiten der Gleichung die 5-te Wurzel (was erlaubt ist, denn beide Seiten sind nicht-negativ), so folgt  $\sqrt[5]{7^3} = \sqrt[7]{3^5}$ .

Alternativ: Wie oben berechnet man  $(\sqrt[5]{7^3})^5 = (\sqrt[5]{7})^{15} = (\sqrt[5]{7^5})^3 = 7^3$ . Dies bedeutet, dass  $\sqrt[5]{7^3}$  eine Zahl ist, deren 5-te Potenz  $7^3$  ist (ausserdem ist  $\sqrt[5]{7^3}$  eine nicht-negative reelle Zahl). Auf Grund der Definition von  $\sqrt[5]{7^3}$  muss also  $\sqrt[5]{7^3} = \sqrt[7]{3^5}$  gelten.

Um z.B.  $\sqrt[3]{5^7} \neq \sqrt[5]{7^3}$  einzusehen, potenzieren wir beide Seiten mit  $3 \cdot 5 = 15$  und erhalten einerseits

$$\left(\sqrt[3]{5^7}\right)^{3 \cdot 5} = \left(\sqrt[3]{5}\right)^{3 \cdot 5 \cdot 7} = \left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^3\right)^{5 \cdot 7} = 5^{35},$$

also eine ganze Zahl, die nur 5 als Primfaktor enthält, und andererseits

$$\left(\sqrt[5]{7^3}\right)^{5 \cdot 3} = \dots = 7^9,$$

also eine Zahl, die nur 7 als Primfaktor enthält.

Diese beiden Zahlen  $5^{35}$  und  $7^9$  können nicht gleich sein, weil die Primfaktorzerlegung eindeutig ist und damit eine Zahl nicht zwei verschiedene Primfaktorzerlegungen haben kann. Also gilt  $\sqrt[3]{5^7} \neq \sqrt[5]{7^3}$ .

b)  $\left(\sqrt[3]{a^5}\right)^3 = \sqrt[3]{a^{5 \cdot 3}} = \sqrt[3]{a^{15}} = \left(\sqrt[3]{a^3}\right)^5 = a^5$  oder kurz  $\left(\sqrt[3]{a^5}\right)^3 = a^5$ .

Zieht man auf beiden Seiten die 3-te Wurzel (oder verwendet die Definition von  $\sqrt[3]{a^5}$ ), so folgt  $\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[3]{a^5}$ .

c)  $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = \sqrt[n]{a^{m \cdot n}} = \sqrt[n]{a^{n \cdot m}} = \left(\sqrt[n]{a^n}\right)^m = a^m$ .

Das Ziehen der  $n$ -ten Wurzel (oder die Definition von  $\sqrt[n]{a^m}$ ) liefert  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$ .

✂ Lösung zu Aufgabe 13.4 ex-potenzen-von-nten-wurzeln-erweiterte-brueche

a)

- Zu  $\sqrt[10]{7^6}$ : Potenzieren mit  $10 = 5 \cdot 2$  ergibt  $\sqrt[10]{7^6}^{10} = 7^6$ .

Da auch  $\left(\sqrt[5]{7^3}\right)^{10} = \left(\sqrt[5]{7^3}\right)^{5 \cdot 2} = \left(\sqrt[5]{7}\right)^{5 \cdot 3 \cdot 2} = \left(\sqrt[5]{7^5}\right)^{3 \cdot 2} = 7^6$  ergibt, folgt (per Wurzelziehen)  $\sqrt[5]{7^3} = \sqrt[10]{7^6}$ .

- Zu  $\sqrt[10]{14^6}$ : Die 10-te Potenz davon ist  $14^6$ ; dies ist verschieden von der 10-ten Potenz von  $\sqrt[5]{7^3}$  (siehe voriger Punkt). Also  $\sqrt[10]{14^6} \neq \sqrt[5]{7^3}$ .

- Zu  $\sqrt[15]{7^9}$ : Die 15-te Potenz dieser nicht-negativen Zahl stimmt mit der 15-ten Potenz von  $\sqrt[5]{7^3}$  überein. Also folgt (per Wurzelziehen)  $\sqrt[15]{7^9} = \sqrt[5]{7^3}$ .

- Zu  $\sqrt[6]{8^4}$ : Potenziert man diese Zahl mit  $30 = 5 \cdot 6$ , so erhält  $(8^4)^5 = 8^{4 \cdot 5} = 8^{20} = 2^{60}$ . Die 30-te Potenz von  $\sqrt[5]{7^3}$  ist aber  $7^{18}$ . Also folgt (Primfaktorzerlegung ist eindeutig), dass  $\sqrt[6]{8^4} \neq \sqrt[5]{7^3}$ .

b) Potenziert man beide Seiten der zu beweisenden Gleichung mit  $5n$ , so erhält man  $\left(\sqrt[5]{7^3}\right)^{5n} = 7^{3n}$ . Ziehen der  $(5n)$ -ten Wurzel liefert die gewünschte Gleichheit.

c) Potenziert man beide Seiten der zu beweisenden Gleichung mit  $nk$ , so erhält man  $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nk} = a^{mk}$ . Ziehen der  $(nk)$ -ten Wurzel liefert die gewünschte Gleichheit.



✂ Lösung zu Aufgabe 13.5 ex-potenzgesetze-rationale-exponenten

Erstes Potenzgesetz, wobei  $p = \frac{x}{m}$  und  $q = \frac{y}{n}$ :

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{x}{m}} \cdot a^{\frac{y}{n}} = a^{\frac{xn}{mn}} \cdot a^{\frac{my}{mn}} = (a^{\frac{1}{mn}})^{xn} \cdot (a^{\frac{1}{mn}})^{my} \text{ Potenzgesetz für ganze Exponenten } (a^{\frac{1}{mn}})^{xn+my} \\ = a^{\frac{xn+my}{mn}} = a^{\frac{x}{m} + \frac{y}{n}}$$

Zweites Potenzgesetz: Beachte, dass  $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$  gilt, denn beide Seiten sind nicht-negativ und die  $m$ -te Potenz beider Seiten ist  $a \cdot b$  (dies verwendet das Potenzgesetz für ganzzahlige Exponenten).

$$(a \cdot b)^p = (a \cdot b)^{\frac{x}{m}} = (\sqrt[m]{a \cdot b})^x \text{ siehe oben } (\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b})^x \text{ Potenzgesetz für ganze Exponenten } (\sqrt[m]{a})^x \cdot (\sqrt[m]{b})^x \\ = a^{\frac{x}{m}} \cdot b^{\frac{x}{m}} = a^p \cdot b^p$$

Drittes Potenzgesetz: Beachte  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$ , denn beide Seiten sind nicht-negativ und ihre  $mn$ -te Potenz ist  $a$ . (das verwendet ein Potenzgesetz für ganze Exponenten).

$$(a^p)^q = (a^{\frac{x}{m}})^{\frac{y}{n}} = \sqrt[n]{((\sqrt[m]{a})^x)^y} \text{ Potenzgesetz für ganze Exponenten } = \sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})^{xy}} \\ = \sqrt[nm]{a^{xy}} \text{ siehe oben } \sqrt[nm]{a^{xy}} = a^{\frac{xy}{mn}} = a^{\frac{x}{m} \cdot \frac{y}{n}} = a^{p \cdot q}$$

✂ Lösung zu Aufgabe 13.6 ex-rationale-gesetze-anwenden

Vereinfachen Sie jeweils so weit wie möglich:

- a)  $x^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{2}{3}} x^{\frac{3}{5}} = x^{\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{5}} = x^{\frac{13}{30}}$
- b)  $x^{-\frac{3}{7}} x^{-2} x^{\frac{17}{7}} = x^{\frac{14}{7}} x^{-2} = x^2 x^{-2} = x^0 = 1$
- c)  $(xy)^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} = y^{\frac{1}{3}}$
- d)  $(z^{\frac{7}{3}})^{-\frac{2}{11}} = z^{\frac{7}{3} \cdot (-\frac{2}{11})} = z^{-\frac{14}{33}}$
- e)  $(x^{-\frac{5}{7}} y)^{\frac{7}{3}} = x^{-\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{3}} y^{\frac{7}{3}} = x^{-\frac{5}{3}} y^{\frac{7}{3}}$
- f)  $(z^{\frac{2}{7}} a)^{-\frac{7}{5}} a^{\frac{22}{5}} z^{\frac{2}{5}} = z^{-\frac{2}{5}} a^{-\frac{7}{5}} a^{\frac{22}{5}} z^{\frac{2}{5}} = z^0 a^{\frac{15}{5}} = a^3$
- g)  $\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{7}{3}}} = x^{\frac{3}{4} - \frac{7}{3}} = x^{-\frac{19}{12}}$
- h)  $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{7}} \cdot \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{5}{3}}} = \frac{x^{\frac{3}{7}}}{y^{\frac{3}{7}}} \cdot \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{5}{3}}} = \frac{x^{\frac{3}{7}} y^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{5}{3}} y^{\frac{3}{7}}} = \frac{x^{\frac{3}{7}}}{x^{-\frac{5}{3}}} \cdot \frac{y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{3}{7}}} = x^{\frac{3}{7} + \frac{5}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3} - \frac{3}{7}} = x^{\frac{44}{21}} \cdot y^{\frac{5}{21}}$
- i)  $\left(\frac{b}{ca}\right)^{-\frac{3}{7}} \cdot \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{5}}} = (b(ca)^{-1})^{-\frac{3}{7}} a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{5}} = (bc^{-1}a^{-1})^{-\frac{3}{7}} a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{5}} = b^{-\frac{3}{7}} c^{\frac{3}{7}} a^{\frac{3}{7}} a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{3}{7} + \frac{2}{3}} a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{3}{7}} b^{\frac{1}{5}} c^{\frac{3}{7}} = \\ a^{\frac{3}{7} + \frac{2}{3}} b^{-\frac{3}{7} + \frac{1}{5}} c^{\frac{3}{7}} = a^{\frac{23}{21}} b^{-\frac{8}{35}} c^{\frac{3}{7}} = \frac{a^{\frac{23}{21}} c^{\frac{3}{7}}}{b^{\frac{8}{35}}}$
- j)  $\left(\frac{1}{5-x}\right)^3 \cdot 5^{-2x} = \frac{1^3}{(5-x)^3} \cdot 5^{-2x} = \frac{5^{-2x}}{5^{-3x}} = 5^{-2x+3x} = 5^x$
- k)  $\frac{(3x+y^2)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{3x+y^2}} = \frac{(3x+y^2)^{\frac{3}{4}}}{(3x+y^2)^{\frac{1}{4}}} = (3x+y^2)^{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = (3x+y^2)^{\frac{2}{4}} = (3x+y^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3x+y^2}$
- l)  $(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}} \cdot (a^2 + 2ab + b^2)^{\frac{2}{3}} = ((a+b)(a-b))^{\frac{2}{3}} \cdot ((a+b)^2)^{\frac{2}{3}} = (a+b)^{\frac{2}{3}} (a-b)^{\frac{2}{3}} \cdot (a+b)^{\frac{4}{3}} = \\ (a+b)^{\frac{6}{3}} (a-b)^{\frac{2}{3}} = (a+b)^2 (a-b)^{\frac{2}{3}}$
- m)  $a(a+b^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{b^2}{\sqrt{a+b^2}} = a(a+b^2)^{-\frac{1}{2}} + b^2 \cdot \frac{1}{(a+b^2)^{\frac{1}{2}}} = a(a+b^2)^{-\frac{1}{2}} + b^2(a+b^2)^{-\frac{1}{2}} = (a+b^2)(a+b^2)^{-\frac{1}{2}} = \\ (a+b^2)^1 (a+b^2)^{-\frac{1}{2}} = (a+b^2)^{1-\frac{1}{2}} = (a+b^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a+b^2}$

✂ Lösung zu Aufgabe 13.7 ex-typische-fehler

- a)  $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} = (a+b)^{\frac{2}{3}}$   
Falsche Regel:  $a^m + b^m = (a+b)^m$ . (Vielleicht mit der korrekten Regel  $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$  verwechselt?)  
Gegenbeispiel: Für  $a = b = 1$  und  $m = 2$  gilt  $1^2 + 1^2 \neq (1+1)^2$ .



- b)  $a^{\frac{5}{3}} + a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5+1}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$   
Falsche Regel:  $a^m + a^n = a^{m+n}$ . (Vielleicht mit der korrekten Regel  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$  verwechselt?)  
Gegenbeispiel: Für  $a = 1$  und  $m = n = 2$  gilt  $1^2 + 1^2 \neq 1^{2+2}$ .
- c)  $a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{3}{7}} = a^{\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{7}} = a^{\frac{4}{7}}$   
Falsche Regel:  $a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$ . (Vielleicht mit der korrekten Regel  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$  verwechselt?)  
Gegenbeispiel: Für  $a = 2$  und  $m = n = 1$  gilt  $2^1 \cdot 2^1 \neq 2^{1 \cdot 1}$ .
- d)  $(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{1}{2}})^2 = a^3 + a$   
Falsche Regel:  $(a + b)^2 = a^2 + b^2$  oder schlimmer gar  $(a + b)^m = a^m + b^m$ . (Korrekt ist die binomische Formel  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .)  
Gegenbeispiel: Für  $a = b = 1$  und  $m = 2$  gilt  $(1 + 1)^2 \neq 1^2 + 1^2$ .
- e)  $(z^{\frac{2}{5}})^{\frac{3}{5}} = z^{\frac{2+3}{5}} = z^{\frac{5}{5}} = z^1 = z$   
Falsche Regel:  $(a^m)^n = a^{m+n}$ . (Vielleicht mit der korrekten Regel  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$  verwechselt?)  
Gegenbeispiel: Für  $a = 2$  und  $m = n = 1$  gilt  $(2^1)^1 \neq 2^2$ .
- f)  $\frac{a^{\frac{4}{7}}}{b^{\frac{4}{7}}} = (a - b)^{\frac{4}{7}}$   
Falsche Regel:  $\frac{a^m}{b^m} = (a - b)^m$ . (Vielleicht mit der korrekten Regel  $\frac{a^m}{b^m} = m^{a-b}$  verwechselt?)  
Gegenbeispiel: Für  $a = 2$  und  $b = 1$  und  $m = 1$  gilt  $\frac{2^1}{1^1} \neq (2 - 1)^1$ .
- g)  $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^1}{b^1} = \frac{a}{b}$  (die zweite Gleichheit stimmt)  
Sehr abstruser Kürzungsfehler. Ist etwa für  $a = 8$  und  $b = 1$  falsch, denn  $\frac{8^{\frac{2}{3}}}{1^{\frac{2}{3}}} = \frac{(\sqrt[3]{8})^2}{(\sqrt[3]{1})^2} = \frac{2^2}{1^2} = 4 \neq \frac{8}{1}$ .
- h)  $\frac{a^{\frac{13}{7}}}{b^{\frac{4}{7}}} = \frac{a^{\frac{13-4}{7}}}{b^{\frac{4-4}{7}}} = \frac{a^{\frac{9}{7}}}{b^{\frac{0}{7}}} = \frac{a^{\frac{9}{7}}}{1} = a^{\frac{9}{7}}$  (nur die erste Gleichheit ist falsch)  
Falsche Regel könnte  $\frac{a^m}{b^m} = \frac{a^{m-n}}{b^{m-n}}$  sein. Gegenbeispiel: Für  $a = 2$  und  $b = 1$  und  $m = 2$  und  $n = 1$  gilt  $\frac{2^2}{1^2} \neq \frac{2^1}{1^1}$ .
- i)  $a(\frac{2}{3})^2 = (a \frac{2}{3})^2$   
Falsche Regel:  $x^{y^z} = (x^y)^z$   
Gegenbeispiel: Für  $x = z = 2$  und  $y = 1$  gilt  $2^{1^2} \neq (2^1)^2$ . (Kein Gegenbeispiel ist  $x = y = z = 2$ .)

✂ Lösung zu Aufgabe 13.8 ex-wurzelgesetze-beweisen

- a)  $\sqrt{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$   
 $\sqrt{\frac{a}{b}} = (\frac{a}{b})^{\frac{1}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$   
 $(\sqrt{a})^n = (a^{\frac{1}{2}})^n = a^{\frac{1}{2} \cdot n} = a^{n \cdot \frac{1}{2}} = (a^n)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^n}$
- b) Beispielsweise gelten  $\sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$  oder  $\sqrt{1+2} = \sqrt{3} < \sqrt{1} + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$  oder  $\sqrt{1+4} = \sqrt{5} < \sqrt{1} + \sqrt{4} = 3$ .
- c) In einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck mit Katheten  $a, b$  und Hypotenuse  $c$  gilt nach Pythagoras  $c^2 = a^2 + b^2$ . Wenn die Wurzel einer Summe die Summe der Wurzeln wäre, würde daraus

$$c = \sqrt{c^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a + b$$

folgen, d.h. die Hypotenuse wäre so lang wie die Summe der beiden Katheten, d.h. die beiden Katheten müssten auf der Hypotenuse liegen und das Dreieck wäre «flach».

Konkretes Gegenbeispiel: Das Dreieck mit Seitenlängen 3, 4, 5 ist rechtwinklig, denn es gilt  $5^2 = 25 = 9 + 16 = 3^2 + 4^2$ . Wenn  $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$  gelten würde, erhielte man  $5 = \sqrt{25} = \sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3+4!$

- d) Aus  $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$  folgt durch Quadrieren (und binomische Formel und erstes Wurzelgesetz)  $a + b = a + 2\sqrt{ab} + b$ , also  $0 = 2\sqrt{ab}$  bzw.  $0 = \sqrt{ab}$ . Nochmaliges Quadrieren liefert  $0 = ab$ . Da ein Produkt genau dann Null ist, wenn einer der Faktoren Null ist, folgt  $a = 0$  oder  $b = 0$ .  
Da offensichtlich  $\sqrt{0+0} = \sqrt{0} + \sqrt{0}$  gilt, sehen wir insgesamt:  
Die Gleichheit  $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$  gilt genau dann, wenn  $a = 0$  oder  $b = 0$  gilt.



✂ Lösung zu Aufgabe 13.9 ex-nte-wurzelgesetze-beweisen

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \sqrt[m]{a \cdot b} &= (a \cdot b)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} \cdot b^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \\
 \sqrt[m]{\frac{a}{b}} &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} \\
 (\sqrt[m]{a})^n &= \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = a^{\frac{1}{m} \cdot n} = a^{n \cdot \frac{1}{m}} = (a^n)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a^n}
 \end{aligned}$$

Bemerkung: Das letzte Wurzelgesetz haben wir übrigens bereits in Aufgabe 13.3 bewiesen.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a}. \text{ Vertauscht man die Rollen von } m \text{ und } n, \text{ so erhält man} \\
 \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[n \cdot m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a}.
 \end{aligned}$$

✂ Lösung zu Aufgabe 13.10 ex-wurzeln-in-potenzen-umschreiben

$$\begin{aligned}
 \text{a) } x^2 \cdot \sqrt{\sqrt{x}} &= x^2 \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{9}{4}} \\
 \text{b) } \sqrt{\sqrt{x^3}} &= \left((x^3)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4}} \\
 \text{c) } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}}} &= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}} \\
 \text{d) } x^2 \cdot \frac{\sqrt{x^3} \sqrt{\frac{x}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x^5} \cdot x} &= x^2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{8}}}}{x^{\frac{5}{2}} \cdot x} = x^2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{3}{8}}}{x^{\frac{7}{2}}} = \frac{x^{(2 + \frac{3}{2} + \frac{3}{8})}}{x^{\frac{7}{2}}} = \frac{x^{\frac{31}{8}}}{x^{\frac{7}{2}}} = x^{(\frac{31}{8} - \frac{7}{2})} = x^{\frac{3}{8}} \\
 \text{e) } \frac{(\sqrt{x} \cdot x^{\frac{1}{4}})^3}{(\sqrt{x^3})^{\frac{1}{2}}} &= \frac{x^{\frac{9}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{\frac{3}{2}} \\
 \text{f) } \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}} &= \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}} = \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot x^{\frac{3}{4}}}} = \sqrt{x \cdot \sqrt{x^{\frac{7}{4}}}} = \sqrt{x \cdot x^{\frac{7}{8}}} = \sqrt{x^{\frac{15}{8}}} = x^{\frac{15}{16}}
 \end{aligned}$$

✂ Lösung zu Aufgabe 13.11 ex-zwoelfte-wurzel-aus-zwei

Für den Faktor  $\lambda$  gilt

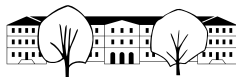
$$\lambda^{12} = 2$$

Um den Exponenten 12 zum Verschwinden zu bringen, werden beide Seiten mit  $\frac{1}{12}$  potenziert (was dasselbe ist, wie die 12-te Wurzel zu nehmen):

$$\begin{aligned}
 (\lambda^{12})^{\frac{1}{12}} &= 2^{\frac{1}{12}} \\
 \lambda &= 2^{\frac{1}{12}} \approx 1.059463
 \end{aligned}$$

✂ Lösung zu Aufgabe 13.12 ex-nte-wurzeln-in-potenzen-umschreiben

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \sqrt{\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[2]{x^5}} &= \sqrt{(x^2)^{\frac{1}{5}} \cdot (x^5)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x^{\frac{2}{5}} \cdot x^{\frac{5}{2}}} = \left(x^{\left(\frac{2}{5} + \frac{5}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{29}{10}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{29}{20}} \\
 \text{b) } \frac{\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x}}}{\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[8]{x^5}}} &= \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{x^{\frac{5}{8}}}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{8}} = x^{\frac{5}{24}} \\
 \text{c) } \left(\sqrt[5]{x^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{5}} &= \left(\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{3}{5}} = x^{-\frac{1}{25}} \\
 \text{d) } \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{x}}} &= x^{\frac{1}{n^3}}
 \end{aligned}$$



$$e) \frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{\sqrt[4]{x}}{\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[6]{x}}}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{\sqrt[4]{x}}{x(\frac{1}{5} - \frac{1}{6})}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{30}}}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{13}{60}}} = x^{\frac{7}{60}}$$

$$f) \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x \cdot \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{x} \cdot x^{(1 + \frac{1}{n})}} = \sqrt[n]{x \cdot \sqrt[n]{x} \cdot \left(x^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{x \cdot \sqrt[n]{x} \cdot x^{\frac{n+1}{n^2}}} = \sqrt[n]{x \cdot \left(x^{\frac{n^2+n+1}{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}}} = \left(x^{\frac{n^3+n^2+n+1}{n^3}}\right)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{n^3+n^2+n+1}{n^4}}$$

✂ Lösung zu Aufgabe 13.13 ex-nte-wurzeln-textaufgaben

(a) Sei  $p$  der unbekannte jährliche Zinssatz. Damit ist nach 42 Jahren der Faktor, mit dem das anfängliche Kapital multipliziert wird:

$$\begin{aligned} (1+p)^{42} &= 1 + 0.233 && |(\cdot)^{\frac{1}{42}} \\ 1+p &= 1.233^{\frac{1}{42}} && | - 1 \\ p &= \sqrt[42]{1.233} - 1 \approx 0.005 = 0.005 \cdot \underbrace{100}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{1}{100}}_{=\%} = 0.5 \cdot \frac{1}{100} = 0.5\% \end{aligned}$$

Der Zinssatz beträgt also 0.5%.

(b) Das Volumen wird mit Faktor  $\lambda^3$  multipliziert. Wir suchen also  $\lambda$  so, dass:

$$\begin{aligned} \lambda^3 &= \frac{1}{2} && |(\cdot)^{\frac{1}{3}} \\ \lambda &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0.5} \approx 0.7937 \end{aligned}$$

D.h. Ein Würfel mit Kantenlänge ca. 7.94 cm Kantenlänge hat ein Volumen von 0.5 l.

(c) In reiner Stimmung hat der Ton e2 die Frequenz  $\frac{3}{2} \cdot 440 = 660$  Hertz.

Das Frequenzverhältnis zweier benachbarter Halbtöne ist bei der temperierten Stimmung  $\sqrt[12]{2}$ . Der temperierten Quinte (7 Halbtöne) entspricht also ein Verhältnis von  $(\sqrt[12]{2})^7 = 2^{\frac{7}{12}} \approx 1.498307$ . In temperierter Stimmung hat der Ton e2 also die Frequenz  $2^{\frac{7}{12}} \cdot 440 \approx 659.25508$  Hertz.

Der Quotient dieser beiden Frequenzen ist

$$\frac{\text{Frequenz reines e2}}{\text{Frequenz temperiertes e2}} = \frac{\frac{3}{2} \cdot 440}{2^{\frac{7}{12}} \cdot 440} = \frac{\frac{3}{2}}{2^{\frac{7}{12}}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^{\frac{7}{12}}} \approx 1.00112989$$

Die bedeutet, dass das reine e2 um 0.112989% höher ist als das temperierte e2. D.h. das e2 auf der Violine ist etwa 1‰ (= ein Promille) grösser als das e2 auf dem Klavier.

*Zusatzaufgabe: Beim Kammer-a von 440 Hz ergibt sich für das reine e2 eine Frequenz von 660 Hz, für das temperierte e2  $440 \cdot 2^{\frac{7}{12}} \approx 659.26$  Hz. Zeichnet man die entsprechenden Schwingungen in GeoGebra, liest man eine Frequenz der Schwebung von ca.  $\frac{1}{1.4} \approx 0.7$  ab. Man kann auch die Zeit berechnen, nachdem der Unterschied der Winkel beider Schwingungen genau  $360^\circ$  beträgt:*

$$\begin{aligned} t \cdot 660 \cdot 360^\circ &= t \cdot 440 \cdot 2^{\frac{7}{12}} \cdot 360^\circ + 360^\circ && | : 360^\circ \\ t \cdot 660 &= t \cdot 440 \cdot 2^{\frac{7}{12}} + 1 && | - t \cdot 440 \cdot 2^{\frac{7}{12}} \\ t \cdot \left(440 \cdot 1.5 - 440 \cdot 2^{\frac{7}{12}}\right) &= 1 \\ t \cdot 440 \cdot \left(1.5 - 2^{\frac{7}{12}}\right) &= 1 && | : \left(440 \cdot \left(1.5 - 2^{\frac{7}{12}}\right)\right) \\ t &= \frac{1}{440 \cdot \left(1.5 - 2^{\frac{7}{12}}\right)} \approx 1.342 \end{aligned}$$

D.h. die Schwebung hat eine Periode (Schwingungsdauer) von 1.342 s, d.h. der Kehrwert davon ist die Frequenz, also  $440 \cdot \left(1.5 - 2^{\frac{7}{12}}\right) \approx 0.7448$  Hz.


**✂ Lösung zu Aufgabe 13.14** ex-wurzelterme-mit-zahlen-auf-normalform-bringen

- a)  $\sqrt{240} = \sqrt{2^4 \cdot 3 \cdot 5} = 4 \cdot \sqrt{15}$
- b)  $\sqrt{35} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{21} = \sqrt{5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$
- c)  $\sqrt{8} + \sqrt{32} = \sqrt{2^3} + \sqrt{2^5} = \sqrt{2^2 \cdot 2} + \sqrt{2^4 \cdot 2} = 2 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
- d)  $\sqrt{4000} = \sqrt{2^5 \cdot 5^3} = 2^2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2 \cdot 5} = 20\sqrt{10}$  oder einfacher:  $\sqrt{4000} = \sqrt{400 \cdot 10} = \sqrt{20^2 \cdot 10} = 20 \cdot \sqrt{10}$
- e)  $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$
- f)  $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{18}{12}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$
- g)  $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{8} - \sqrt{6}) = \sqrt{2 \cdot 8} + \sqrt{3 \cdot 8} - \sqrt{2 \cdot 6} - \sqrt{3 \cdot 6} = 4 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$
- h)  $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{35}}{5}$

**✂ Lösung zu Aufgabe 13.15** ex-wurzelterme-mit-zahlen-auf-normalform-mit-binomischer

- a)  $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$
- b)  $\frac{4}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = 2 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{5}$
- c)  $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}$
- d)  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x + \sqrt{xy}}{x - y}$

**✂ Lösung zu Aufgabe 13.16** ex-wurzelgleichungen-easy

a)

$$\begin{aligned} \sqrt{x+7} &= 7 && |(\cdot)^2 \\ x+7 &= 49 && | -7 \\ x &= 42 \end{aligned}$$

Probe:  $\sqrt{42+7} = \sqrt{49} = 7$ . Also ist 42 eine Lösung der Ursprungsgleichung.

b) Die Gleichung hat keine Lösung.

Man könnte die Gleichung wie Aufgabe a) lösen, die Probe machen und feststellen, dass man eine Scheinlösung erhalten hat. Man könnte aber auch sofort einsehen, dass in der Ausgangsgleichung das Resultat einer Wurzel nie negativ ( $-7$ ) sein kann.

c)

$$\begin{aligned} \sqrt{x-3} &= \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x+7} && |(\cdot)^2 \\ x-3 &= \frac{4}{2}(x+7) \\ x-3 &= 2x+14 && | -x-14 \\ -17 &= x \end{aligned}$$

Probe: Die rechte Seite ergibt  $\sqrt{-20}$ , womit diese Gleichung keine Lösung hat.



d)

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x-3} &= \sqrt{x+7} && |(\cdot)^2 \\ \frac{4}{2} \cdot (x-3) &= x+7 \\ 2x-6 &= x+7 && | -x+6 \\ x &= 13 \end{aligned}$$

Probe:  $\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{10} = \frac{2\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{20}$

Damit ist  $x = 13$  eine Lösung der Ursprungsgleichung.

✂ Lösung zu Aufgabe 13.17 ex-wurzelgleichungen-hard

(a)

$$\begin{aligned} \sqrt{4x+5} &= \sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} && |(\cdot)^2 \\ 4x+5 &= x-1+x+4+2\sqrt{(x-1)(x+4)} && | -2x-3 \\ 2x+2 &= 2\sqrt{x^2+3x-4} && |:2 \\ x+1 &= \sqrt{x^2+3x-4} && |(\cdot)^2 \\ x^2+2x+1 &= x^2+3x-4 && | -x^2-2x+4 \\ 5 &= x \end{aligned}$$

Eingesetzt erhält man eine wahre Aussage (nämlich  $\sqrt{25} = \sqrt{4} + \sqrt{9}$ ),  $x = 5$  ist also die Lösung der Gleichung.

(b)

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2} &= \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} && |(\cdot)^2 \\ x-2 &= x+3+x-1+2\sqrt{(x+3)(x-1)} && | -2x-2 \\ -x-4 &= 2\sqrt{x^2+2x-3} && |(\cdot)^2 \\ x^2+8x+16 &= 4x^2+8x-12 && | -x^2-8x+12 \\ 28 &= 3x^2 && |:3 \\ \frac{28}{3} &= x^2 \\ x &= \pm\sqrt{\frac{28}{3}} \end{aligned}$$

Der negative Lösungskandidat scheidet aus, weil für ihn  $\sqrt{x-1}$  nicht definiert ist. Der positive Lösungskandidat ist etwas grösser als 3 (da  $\frac{28}{3} > 9$ ), und damit sind immerhin alle Zahlen unter den Wurzeln der Ausgangsgleichung positiv.

Trotzdem behaupten wir, dass  $x = \sqrt{\frac{28}{3}}$  keine Lösung der Ausgangsgleichung ist!

Heuristisch: Wenn man die Gleichung im Taschenrechner testet, kommen links und rechts sehr verschiedene Werte heraus. Dies wird aber streng genommen erst dann eine mathematisch saubere Begründung, wenn man weiss, dass der Taschenrechner auf genügend viele Stellen genau gerechnet hat.

1. mathematisch sauberer Weg (um zu sehen, dass die Ausgangsgleichung keine Lösung hat): Wenn die Ausgangsgleichung eine Lösung hat, so müssen alle Ausdrücke unter den Wurzelzeichen  $\geq 0$  sein, d.h.  $x \geq 2$  gelten. Für solche  $x$  gilt aber (wegen  $x-2 < x+3$ ) stets  $\sqrt{x-2} < \sqrt{x+3}$  und erst recht  $\sqrt{x-2} < \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}$ . Also hat die Gleichung keine Lösung. (Alternativ gilt auch  $\sqrt{x-2} < \sqrt{x-1} < \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}$ .)



2. mathematisch sauberer Weg (um zu sehen, dass  $x = \sqrt{\frac{28}{3}}$  keine Lösung der Ausgangsgleichung ist): Angenommen, die Ausgangsgleichung würde für diesen Wert gelten. Dann gilt auch die zweite der obigen Gleichungen und damit die dritte. Diese kann aber nicht gelten, denn die linke Seite ist negativ, die rechte aber positiv! (Das Problem ist, dass man für diesen Wert von  $x$  zwar von der zweiten Gleichung auf die erste schliessen kann (per Wurzelziehen), aber nicht von der fünften auf die vierte: Die Wurzel der linken Seite der fünften Gleichung ist die positive Zahl  $x + 4$  und nicht die negative Zahl  $-x - 4$ .)

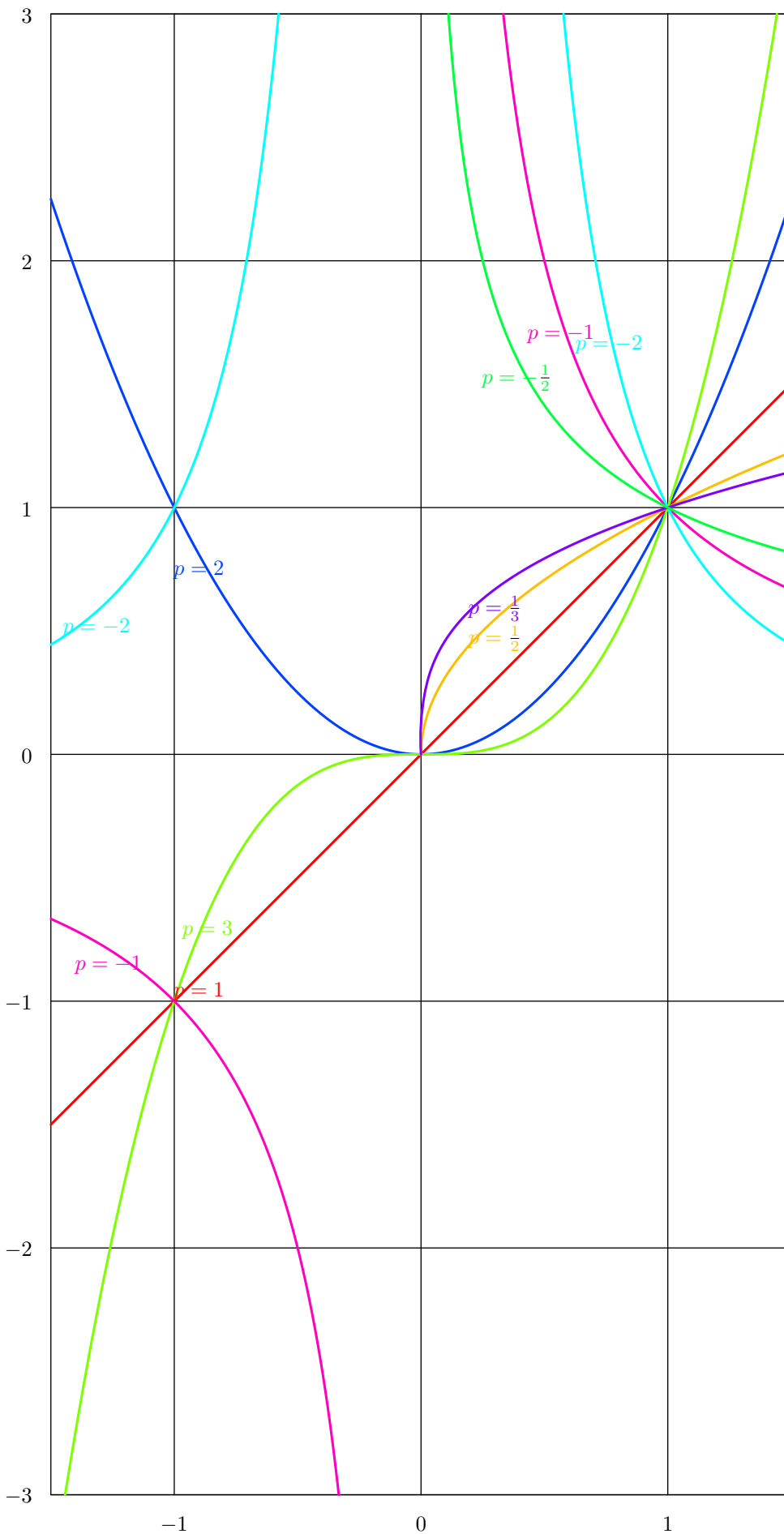
Resultat: Die Gleichung hat **keine Lösung**.

✂ Lösung zu Aufgabe 13.22 ex-potenzfunktionen-parameter-bestimmen-formal

- a)  $a = 3, p = 4$                       b)  $a = -1, p = 2$                       c)  $a = \frac{1}{2}, p = -2$   
d)  $a = 1, p = 0$  ( $f(x) = 1$  ist nur mit  $\mathbb{D} = \mathbb{R}^*$  eine Potenzfunktion, weil  $f(0) = 1 \cdot 0^0$  nicht definiert ist).  
e)  $a = 0, p$  unbestimmt      f)  $a = 1, p = 1$                       g)  $a = -2, p = \frac{1}{2}$                       h)  $a = -\frac{1}{3}, p = -3$

✂ Lösung zu Aufgabe 13.23 ex-potenzfunktionen-spinne-zeichnen







### ✳ Lösung zu Aufgabe 13.24 ex-potenzfunktionen-spinne-analysieren

Unten ist beispielhaft die Lösung für  $p = -2$  erklärt.

$$p = 1 \quad (-1.5, -1.5) \text{ und } (1.5, 1.5)$$

$$p = 2 \quad (-1.5, 2.25) \text{ und } (1.5, 2.25)$$

$$p = 3 \quad (-\sqrt[3]{3}, -3) \text{ und } (\sqrt[3]{3}, 3)$$

$$p = -1 \quad \left(-\frac{1}{3}, -3\right) \text{ und } \left(\frac{1}{3}, 3\right) \text{ und } \left(-1.5, -\frac{2}{3}\right) \text{ und } \left(1.5, \frac{2}{3}\right)$$

$$p = -2 \quad \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, 3\right) \text{ und } \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, 3\right) \text{ und } \left(-1.5, \frac{4}{9}\right) \text{ und } \left(1.5, \frac{4}{9}\right)$$

$$p = \frac{1}{2} \quad (1.5, \sqrt{1.5})$$

$$p = \frac{1}{3} \quad (1.5, \sqrt[3]{1.5})$$

$$p = -\frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{9}, 3\right) \text{ und } \left(1.5, \frac{1}{\sqrt{1.5}}\right)$$

Lösung für  $p = -2$ , d.h.  $f(x) = x^{-2}$ .

- Linke Seite des Rechtecks, d.h.  $x = -1.5$ . Dann gilt  $f(x) = (-1.5)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ . Wegen  $-3 < \frac{4}{9} < 3$  liegt der zugehörige Punkt  $(-1.5, \frac{4}{9})$  wirklich auf der linken Rechtecksseite.
- Rechte Seite des Rechtecks, d.h.  $x = 1.5$ . Dann gilt  $f(x) = (1.5)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ . Wegen  $-3 < \frac{4}{9} < 3$  liegt der zugehörige Punkt  $(1.5, \frac{4}{9})$  wirklich auf der rechten Rechtecksseite.
- Untere Seite des Rechtecks: Gesucht ist  $x$  mit  $f(x) = -3$ , d.h.  $x^{-2} = -3$ , d.h.  $\frac{1}{x^2} = -3$ , d.h.  $x^2 = -\frac{1}{3}$ . Die Gleichung hat keine Lösung (denn Quadrate sind stets positiv oder Null). Also liegt kein Punkt des Graphen auf der unteren Seite des Rechtecks.
- Oberer Rand des Rechtecks: Gesucht ist  $x$  mit  $f(x) = 3$ , d.h. ähnlich wie oben umgeformt  $x^2 = \frac{1}{3}$ , d.h.  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Wegen  $-1.5 < \pm \frac{1}{\sqrt{3}} < 1.5$  liefert dies zwei Punkte auf der oberen Rechtecksseite.

### ✳ Lösung zu Aufgabe 13.25 ex-potenzfunktionen-grosse-n

Zuerst ist zu bemerken, dass diese Funktionen immer durch den Punkt  $(1, 1)$  gehen, egal was  $n$  für einen Wert hat. Für positive Exponenten gehen die Funktionen durch den Punkt  $(0, 0)$ .

- a) Auf  $] -1, 1[$  ist die Funktion fast 0, dann steigt sie sehr steil durch den Punkt  $(-1, 1)$  bzw.  $(1, 1)$  an. Es ergibt sich eine Art «eckiges U».
- b) Auf  $] -1, 1[$  ist die Funktion fast 0. Im positiven Bereich steigt die Funktion durch den Punkt  $(1, 1)$  sehr steil an, im negativen Bereich fällt die Funktion durch  $(-1, -1)$  sehr steil ab.
- c) Die Funktion ist praktisch 1 für  $x$ -Werte grösser Null. Bei Null fällt die Funktion sehr steil auf  $(0, 0)$  ab. Es ergibt sich eine Art «liegendes L»; beachte aber, dass die Funktion für sehr grosse Werte von  $x$  beliebig gross (beispielsweise wird für  $n = 1000$  der Wert 10 bei  $10^{1000}$  angenommen).
- d) Auf  $] -1, 1[$  ist der Funktionswert sehr gross. Bei  $(-1, 1)$  und  $(1, 1)$  fällt der Funktionswert sehr schnell auf fast 0 ab. Ausserhalb von  $[-1, 1]$  ist der Funktionswert nahe bei Null. Es ergeben sich «zwei L».
- e) Wie d), ausser dass die Funktion im negativen Bereich selbst negativ ist (und das «L» nach unten an der  $x$ -Achse gespiegelt wird).
- f) Die Funktion ist nahezu konstant 1, ausser gegen Null hin steigt die Funktion steil an und strebt gegen unendlich (und nicht für  $x = 0$  nicht definiert). Für sehr grosse  $x$  geht die Funktion langsam gegen 0 (beispielsweise wird für  $n = 1000$  der Wert 0.1 bei  $10^{1000}$  angenommen)

### ✳ Lösung zu Aufgabe 13.26 ex-potenzfunktionen-intervall-bijektion

Die Funktion  $f(x)$  sollte erst langsamer ansteigen als  $f(x) = x$ , dann gegen  $x = 1$  schneller, aber immer noch durch den Punkt  $(1, 1)$  gehen.

Dazu bieten sich Potenzfunktionen an, z.B.  $f(x) = x^2$  oder  $f(x) = x^3$ . Was besser passt, muss ausprobiert und hängt nicht zuletzt von den verwendeten Bauteilen und der Umgebungshelligkeit ab.

### ✳ Lösung zu Aufgabe 13.29 ex-volumen-hyperwuerfel-strecken

a) 1 m.

b)  $s^4 = 0.5$ , also  $s = \sqrt[4]{0.5} \approx 0.8409$  m.

c) Das Volumen wird mit  $\lambda^4$  multipliziert. Also  $\lambda^4 = 100$  und damit  $\lambda = \sqrt[4]{100} = \sqrt{10} \approx 3.1623$ .

**✂ Lösung zu Aufgabe 13.30** ex-wurzelgleichungen-warum-keine-loesung

Es werden die Abkürzungen LS und RS für linke und rechte Seite der Gleichung verwendet.

- a) LS ist positiv, RS negativ (und nicht Null).
- b) LS ist negativ (oder Null), RS ist positiv (nicht Null).
- c) LS:  $x \geq 4$ . RS:  $x \leq -4$ . Beides nicht gleichzeitig möglich.
- d) LS: ist positiv (oder Null für  $x = 0$ ). RS ist negativ (oder Null für  $x = -2$ ).
- e)  $\sqrt{x+1} < \sqrt{x+2}$  und damit erst recht  $\sqrt{x+1} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}$ .
- f) LS:  $x \geq 4$  und LS ist positiv oder Null. RS ist negativ für  $x \geq 4$ .