11 Strahlensätze und Ähnlichkeit

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit Streckungen (Vergrösserungen und Verkleinerungen) der Ebene (und des Raumes) und dem Studium der dabei auftretenden Verhältnisse von Längen und Flächen (und Volumen).

11.1 Verhältnisse

Definition 11.1 Verhältnis

Das **Verhältnis** einer Grösse a zu einer anderen Grösse b ist der *Quotient* $\frac{a}{b}$ dieser beiden Grössen. Verhältnisse sind reelle Zahlen.
Statt das Verhältnis als $\frac{a}{b}$ zu schreiben, wird oft die Notation

$$a : b$$

und die Sprechweise «a zu b» oder «das Verhältnis von a zu b» verwendet.

Beispiele

- Auf Landkarten wird der Massstab als Verhältnis angegegeben, z.B. bedeutet «1:100'000», dass 1 cm auf der Landkarte 100'000 cm in der Wirklichkeit entspricht.
- Mischungen werden oft durch Verhältnisse angegeben. Z.B. besteht Schwarzpulver aus Salpeter, Holzkohle und Schwefel im (Gewichts-)Verhältnis 15 : 3 : 2.

Aufgabe 11.1 Auf einer Wanderkarte des Massstabs 1:25'000 beträgt die minimale Entfernung von der Kanti bis zum Bodensee 39 cm (Luftlinie). Wie gross ist sie in der Realität in km?

9.75 km

Aufgabe 11.2 Eine 3 m lange Strecke soll im Verhältnis 3 : 2 geteilt werden. Wie lange sind die beiden Teilstücke?

1.8 m und 1.2 m (insgesamt $3 + 2 = 5$ Teile).
Formal: Löse das Gleichungssystem $a + b = 3$ und $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$.

Aufgabe 11.3 Wie viel muss wovon abgewogen werden, um 100 g Schwarzpulver herzustellen?

75 g Salpeter, 15 g Holzkohle, 10 g Schwefel (insgesamt $15 + 3 + 2 = 20$ Teile).
Formal kann man auch ein System dreier Gleichungen in drei Variablen lösen.

Beispiel einer Verhältnisgleichung Der Durchmesser der Sonne ist etwa 109 Mal so gross wie der Durchmesser der Erde. Wenn man annimmt, dass ein Elefant etwa 6 Meter lang ist und ein Hamster etwa 5.5 cm lang ist, so gilt die Verhältnisgleichung (= Gleichung von Verhältnissen)

(Durchmesser der Sonne) : (Durchmesser der Erde) = (Länge eines Elefanten) : (Länge eines Hamsters)

oder etwas salopp:

Sonne : Erde = Elefant : Hamster

Merke

Eine Verhältnisgleichung kann wie folgt umgeformt werden:

$$a : b = x : y \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

$$\overset{|\cdot by}{\Longleftrightarrow} \quad ay = bx$$

Produkt der Aussenglieder = Produkt der Innenglieder

Aufgabe 11.4 Folgern Sie aus der Merkebox, dass Innenglieder (bzw. Aussenglieder) vertauscht werden dürfen:

$$a : b = x : y \iff a : x = b : y$$

✎ $ay = bx \iff ay = xb$

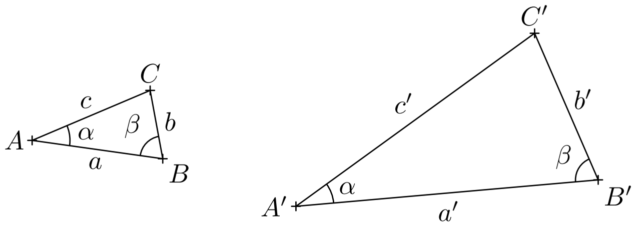
Beispiel Unsere obige Verhältnisgleichung «Sonne : Erde = Elefant : Hamster» ist nach dieser Aufgabe gleichbedeutend zu

$$\text{Sonne} : \text{Elefant} = \text{Erde} : \text{Hamster}$$

11.2 Ähnlichkeit und Streckung

Definition 11.2 Ähnliche Dreiecke

Stimmen zwei Dreiecke in **zwei Winkeln** überein, so sind sie **ähnlich**.



Merke

Sind zwei Dreiecke ähnlich, so sind einander entsprechende Verhältnisse der Seiten gleich:

✎

$$a : b = a' : b' \qquad a : c = a' : c' \qquad b : c = b' : c'$$

Der Beweis dafür führt über die Strahlensätze, die im Abschnitt 11.3 behandelt werden.

Aufgabe 11.5 Zeigen Sie, dass für ähnliche, wie oben beschriftete Dreiecke, die drei Verhältnisse einander entsprechender Seiten gleich gross sind:

$$a' : a = b' : b = c' : c$$

✎ Aussenglieder in den drei Verhältnisgleichungen vertauschen.

Definition 11.3 Streckfaktor

Der **Streckfaktor** von *Originaldreieck* $\triangle ABC$ zu *Bilddreieck* $\triangle A'B'C'$ ist das Verhältnis von jeder Seite des Bilddreiecks zur entsprechenden Seite des Originaldreiecks. (Diese drei Verhältnisse sind gleich nach Aufgabe 11.5.)
Der Streckfaktor wird oft mit λ (lambda, griechisches «l») bezeichnet, d.h.

$$\lambda = a' : a = b' : b = c' : c$$

Aufgabe 11.6 Messen Sie in der obigen Zeichnung ungefähr ab, mit welchem Streckfaktor das Dreieck $\triangle ABC$ gestreckt wurde, um das Dreieck $\triangle A'B'C'$ zu erhalten.
✎ $\lambda = 2.3$

Beschriften Sie die beiden Dreiecke mit «Originaldreieck» bzw. «Bilddreieck» und verbinden sie diese Dreiecke mit einem mit $\lambda = \ldots$ beschrifteten Pfeil.

Aufgabe 11.7 Mit welchem Streckfaktor muss das Dreieck $\triangle A'B'C'$ gestreckt werden, um das Dreieck $\triangle ABC$ zu erhalten?

✎ $\lambda = \frac{1}{2.3} \approx 0.43$

Wenn ein Dreieck mit Faktor 7 gestreckt wird, mit welchem Faktor muss das Bilddreieck gestreckt werden, um das Originaldreieck zu erhalten?

✎ mit dem Faktor $\frac{1}{7}$

Wenn ein Dreieck mit einem allgemeinen Faktor λ gestreckt wird, welcher Streckfaktor gehört zu der umgekehrten Streckung?

✎ der Faktor $\frac{1}{\lambda}$

Aufgabe 11.8

a) Ein Dreieck wird mit dem Faktor $\lambda = 3$ gestreckt. Um welchen Faktor verändert sich sein Flächeninhalt?
b) Gleiche Frage mit dem Streckfaktor $\lambda = 4$.
c) Gleiche Frage mit dem Streckfaktor $\lambda = \frac{1}{10}$.
d) Gleiche Frage mit allgemeinem Streckfaktor $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
e) Ein allgemeines Viereck wird mit dem Faktor λ gestreckt. Wie verändert sich sein Flächeninhalt?
f) Ein Würfel wird mit dem Faktor $\lambda = \frac{1}{2}$ gestreckt. Wie verändert sich sein Volumen? Wie seine Oberfläche?
g) Gleiche Frage mit allgemeinem Streckfaktor λ.

Merke

Wird mit einem Faktor λ gestreckt, werden

- Längen mit λ,
- Flächeninhalte mit λ^2 und
- Volumen mit λ^3 multipliziert.

Aufgabe 11.9 Zwei entlang der längeren Seite nebeneinandergelegte A5-Papierbögen decken genau einen A4-Papierbogen ab. Die entsprechenden Rechtecke sind ähnlich (in dem Sinne, dass das A4-Blatt aus dem A5-Blatt durch eine Streckung entsteht).

a) Mit welchem Faktor wird ein A5-Blatt gestreckt, um ein A4-Blatt zu erhalten?
b) Was ist das Verhältnis von längerer zu kürzerer Seite eines A5-Blatts?
c) Was ist das Verhältnis von längerer zu kürzerer Seite eines A4-Blatts?
d) Die A-Papierbögen haben allgemein die Eigenschaft, dass jeweils zwei entlang der längeren Seite nebeneinandergelegte Bögen eines Formats den Bogen mit der eins kleineren Nummer liefern (beispielsweise liefern zwei A1-Bögen einen A0-Bogen).
Die Fläche eines A0-Papierbogen beträgt einen Quadratmeter. Berechnen Sie Länge und Breite eines A0-Bogens.

Aufgabe 11.10 Der Erddurchmesser ist etwa 3.67 mal grösser als der Monddurchmesser. Wieviel mal grösser ist die Erdoberfläche als die Mondoberfläche? Gleiche Frage für das Volumen.

Aufgabe 11.11 Ein kegelförmiges Cocktailglas soll mit der Hälfte der maximal möglichen Füllmenge gefüllt werden. Bis auf welche Höhe muss das Glas gefüllt werden? Geben Sie das Resultat als Prozentsatz der Höhe an (100% = volles Glas). *Hinweis: Lösen Sie die Gleichung mit dem TR, wenn Sie die Gleichung nicht von Hand lösen können.*

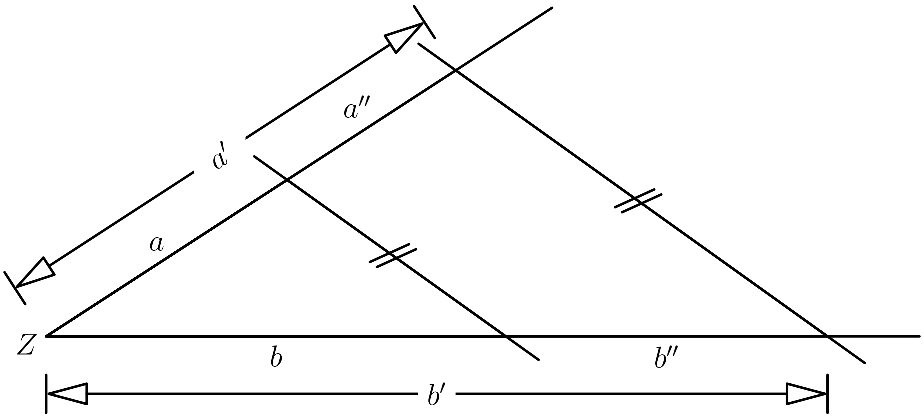
Aufgabe 11.12 Eine Firma stellt Gartenzwerge her, die alle zueinander ähnlich sind (in dem Sinne, dass sie auseinander durch Streckungen hervorgehen). Das Modell «Schlafmütze» wird in drei Grössen hergestellt, nämlich mit den Höhen 10 cm, 15 cm und 20 cm. Die Zwerge sind aus massivem Gips. Das kleinste Modell wiegt 600 g. Das grösste Modell benötigt 50 ml Farbe für den Anstrich.

Wie schwer sind die drei Modelle und wieviel Farbe wird für jedes der Modelle benötigt (Annahme: Die benötigte Farbe ist proportional zur Oberfläche)?

Aufgabe 11.13 Lässt sich eine der A-Serie von Rechtecken entsprechende Serie von Quadern definieren?

11.3 Strahlensätze

Setting: Von einem Punkt Z, dem sogenannten *Scheitel*, gehen zwei verschiedene Strahlen aus, die von zwei parallelen Geraden geschnitten werden (wobei diese beiden parallelen Geraden nicht durch den Punkt Z gehen).



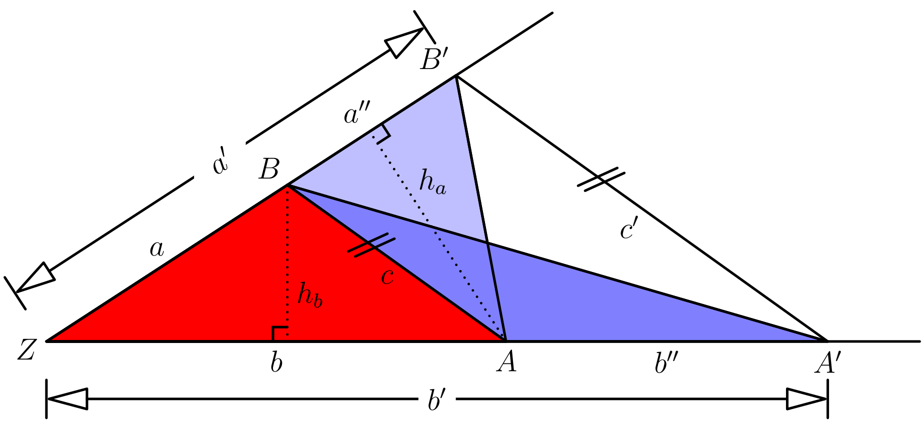
Satz 1 1. Strahlensatz

Wann immer wir im soeben beschriebenen Setting sind, gilt:
Je zwei Abschnitte auf dem einen Strahl verhalten sich zueinander wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl, d.h. mit den Bezeichnungen in der obigen Skizze gelten die Verhältnisgleichungen:

✎

$$a : a' = b : b' \quad \text{und} \quad a : a'' = b : b'' \quad \text{und} \quad a'' : a' = b'' : b'$$

Beweis:
Unsere beiden Strahlen schneiden die beiden parallelen Geraden in vier Punkten, die wir A, B, A' und B' nennen (wie in der folgenden Zeichnung). Weiter verwenden wir die Bezeichnungen $c = \overline{AB}$ und $c' = \overline{A'B'}$ für die von den Strahlen begrenzten Abschnitte der beiden Parallelen.



✎ Wie in der Skizze ersichtlich bezeichnen wir im roten Dreieck $\triangle ZAB$ die Höhe über b mit h_b und die Höhe über a mit h_a. Damit können wir die Fläche dieses roten Dreiecks auf zwei Arten berechnen:

$$\frac{1}{2}bh_b = \text{Fläche } \triangle ZAB = \frac{1}{2}ah_a$$

Das dunkelblaue Dreieck $\triangle AA'B$ und das hellblaue Dreieck $\triangle AB'B$ haben denselben Flächeninhalt, da sie die gemeinsame Grundseite c und dieselbe Höhe haben (da die beiden Geraden (AB) und $(A'B')$ laut Annahme parallel sind). Damit ergibt sich

$$\frac{1}{2}b''h_b = \text{Fläche } \triangle AA'B = \text{Fläche } \triangle AB'B = \frac{1}{2}a''h_a$$

Weiter ergibt sich

$$\frac{1}{2}b'h_b = (\text{Fläche } \triangle ZA'B) = (\text{Fläche } \triangle ZAB') = \frac{1}{2}a'h_a$$

Die im Strahlensatz behaupteten Gleichheiten erhalten wir durch Division der ersten durch die dritte Gleichung bzw. durch Division der ersten durch die zweite Gleichung bzw. durch Division der zweiten durch die dritte Gleichung.

-QED-

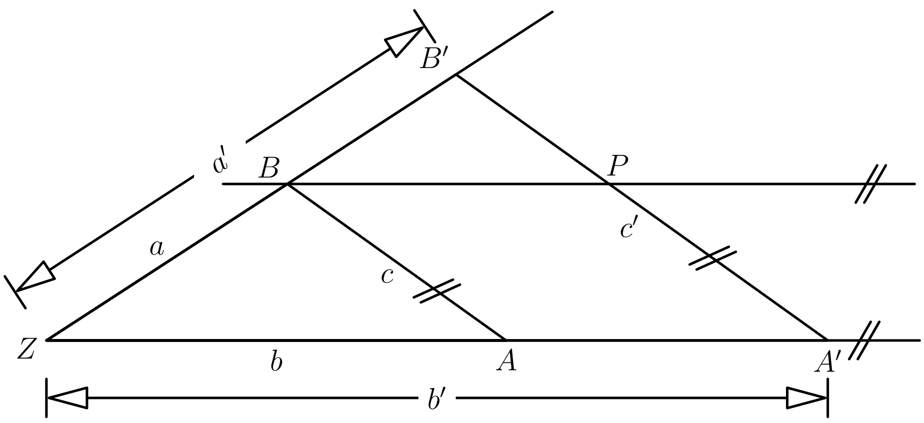
Satz 2 2. Strahlensatz

Unter denselben Voraussetzungen wie beim 1. Strahlensatz gilt: Die beiden Abschnitte auf den parallelen Geraden verhalten sich genauso wie die entsprechenden von Z ausgehenden Strecken, d.h. mit den zuvor verwendeten Bezeichnungen gilt ✎

$$c : c' = a : a' = b : b'$$

Beweis:

Zeichne die Parallele zu (AA') durch B. Sei P ihr Schnittpunkt mit $(A'B')$.



✎ Beachte $\overline{A'P} = \overline{AB} = c$, denn $AA'PB$ ist ein Parallelogramm. Nach dem erstem Strahlensatz (vom Scheitel B' aus gesehen) gilt:

$$a : a' = \overline{A'P} : c' = c : c'$$

Analog zeigt man $b : b' = c : c'$. -QED-

Aufgabe 11.14 Unter den Voraussetzungen des ersten Strahlensatzes, folgern Sie (aus dem ersten Strahlensatz)

$$a : b = a' : b' = a'' : b''$$

und (aus dem zweiten Strahlensatz)

$$a : c = a' : c' \quad \text{und} \quad b : c = b' : c'.$$

Beschreiben Sie die erste und die beiden letzten dieser vier Verhältnisgleichungen in eigenen Worten (also $a : b = a' : b'$ und $a : c = a' : c'$ und $b : c = b' : c'$).
Überlegen Sie sich, warum dies die erste Merkebox im Abschnitt 11.2 erklärt.

Aufgabe 11.15 Zeige die **Umkehrung des 1. Strahlensatzes:** Gegeben sind zwei von einem Punkt Z ausgehende Strahlen und zwei Punkte A und A' auf dem einen Strahl und zwei Punkte B und B' auf dem anderen Strahl. Ähnlich wie oben verwenden wir die Bezeichnungen $a = \overline{ZB}$, $a' = \overline{ZB'}$, $b = \overline{ZA}$, $b' = \overline{ZA'}$. Gilt dann

$$a : a' = b : b'$$

so sind (AB) und $(A'B')$ parallel.
Hinweis: Verwende den ersten Strahlensatz und eine «absichtlich leicht falsche» Zeichnung, bei der (AB) und $(A'B')$ nicht parallel sind.

Aufgabe 11.16 Sie haben ein Stab, der 2 m lang ist, und stehen in Schaffhausen am Rheinufer. Genau auf der gegenüberliegenden Uferseite ist ein 10 m langer Weidling (= ein spezielles Ruderboot) angebunden. Wie können Sie die Flussbreite an dieser Stelle möglichst genau bestimmen? Als weitere Hilfsmittel stehen kleine Äste zur Verfügung. Machen Sie eine saubere Skizze!

Aufgabe 11.17 Sie stehen in Paris und haben Sicht auf den Eiffelturm. Wenn Sie Ihren Arm ausstrecken, verdeckt Ihre Faust mit aufgestelltem Daumen 👍 genau den Eiffelturm, dessen Höhe sie kennen (bitte nachschlagen!). Wie weit vom Eiffelturm sind Sie entfernt?

Aufgabe 11.18 Sie haben eine Dachlatte der Länge 2 m, einen Massstab der Länge 30 cm, eine kleine Schraubzwinge und einen Bleistift. Erklären Sie mit einer sauberen Skizze, wie Sie damit die Höhe eines 15 m bis 40 m hohen Baumes bestimmen können.

Aufgabe 11.19 Gegeben ist eine Strecke $[AB]$. Teilen Sie diese Strecke $[AB]$ mit Hilfe der Strahlensätze, aber ohne Messung, konstruktiv in drei exakt gleich grosse Teile.

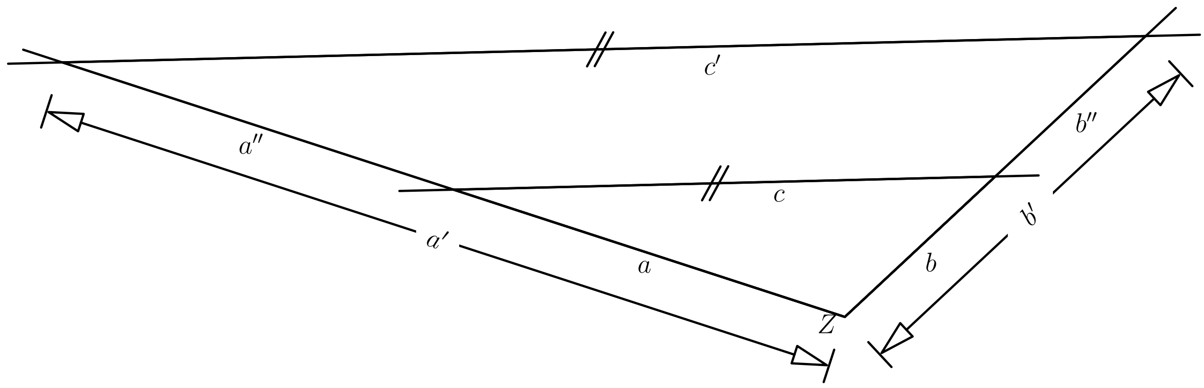
Aufgabe 11.20 Gegeben ist eine Strecke $[AB]$. Teilen Sie diese Strecke konstruktiv im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$. Achtung: Es darf nichts gemessen werden!

11.4 Weitere Aufgaben

Strahlensätze

Aufgabe 11.21 Gegeben ist eine Strecke $[AB]$. Teilen Sie diese Strecke $[AB]$ mit Hilfe der Strahlensätze, aber ohne Messung, konstruktiv in drei Teile im Verhältnis $2 : 3 : 1$.

Aufgabe 11.22 Berechnen Sie jeweils aus den gegebenen vier Längen die verbleibenden vier der Längen a, a', a'', b, b', b'', c und c'. (Die Zeichnung dient natürlich nur dazu, die Bezeichnungen zu erklären und ist nicht massstabsgetreu.)

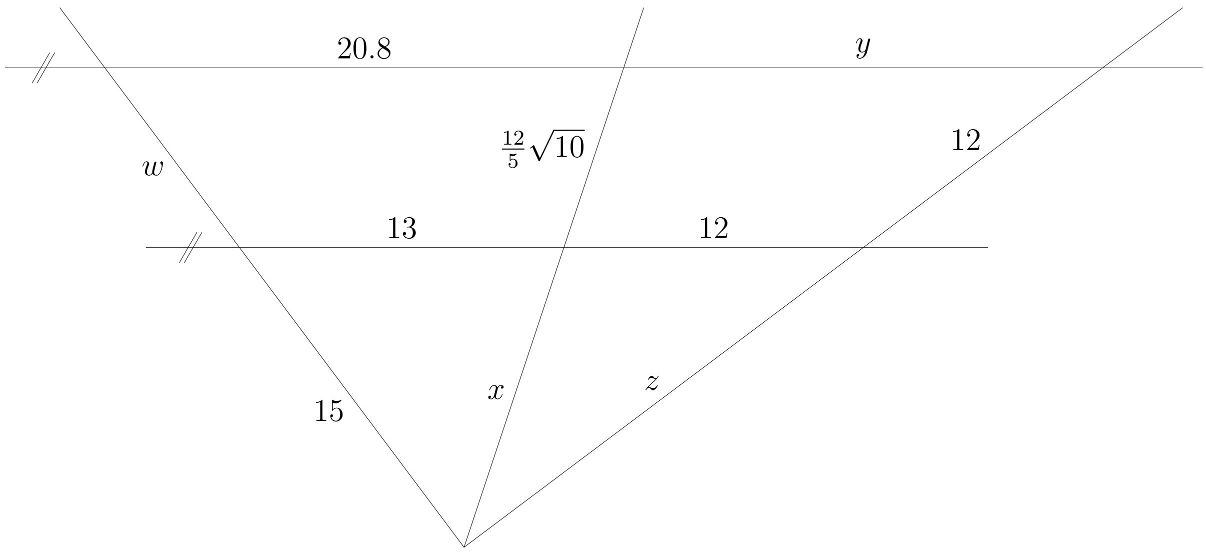


a) $a = 5$, $b = 2$, $c = 4$, $c' = 5$

b) $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{5}{3}$, $b' = \frac{25}{9}$, $c = \frac{4}{3}$

c) $a' = \frac{25}{9}$, $b' = \frac{20}{9}$, $b'' = \frac{8}{9}$, $c' = \frac{10}{9}$

Aufgabe 11.23 Berechnen Sie die Längen der Strecken w, x, y und z.



Verhältnisse

Aufgabe 11.24 Bestimmen Sie das Verhältnis von Höhe zu Seite im gleichseitigen Dreieck genau und angenähert als Kommazahl.

Aufgabe 11.25 Der Kanton St. Gallen hat eine Gesamtfläche von 2028.2 km^2.
Welche Fläche (in cm^2) bedeckt er auf einer Karte des Massstabs 1:300'000?

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Streckungen

Aufgabe 11.26

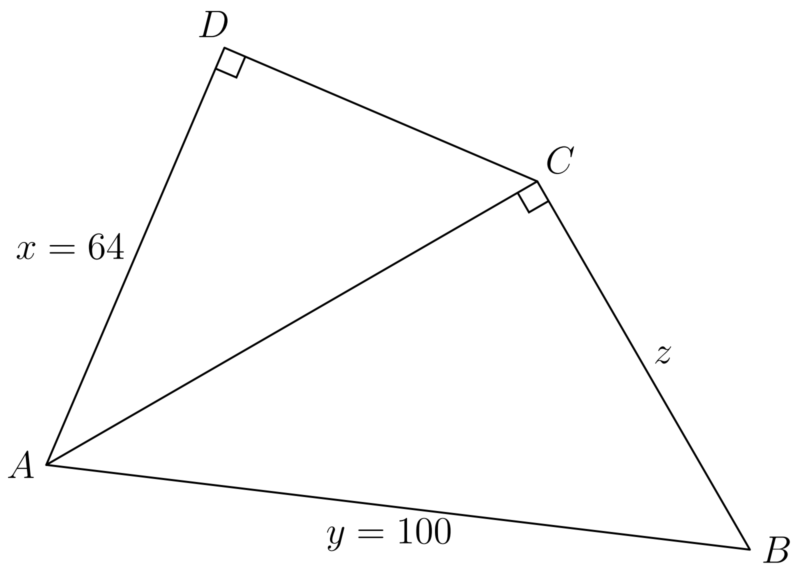
a) Ursina möchte ihren Drachen mit einem Drittel der ursprünglichen Fläche nachbauen. Mit welchem Faktor muss sie die Längen der Stangen multiplizieren?

b) Urs möchte seinen Drachen mit der dreifachen Fläche nachbauen. Mit welchem Faktor muss er die Längen der Stangen multiplizieren?

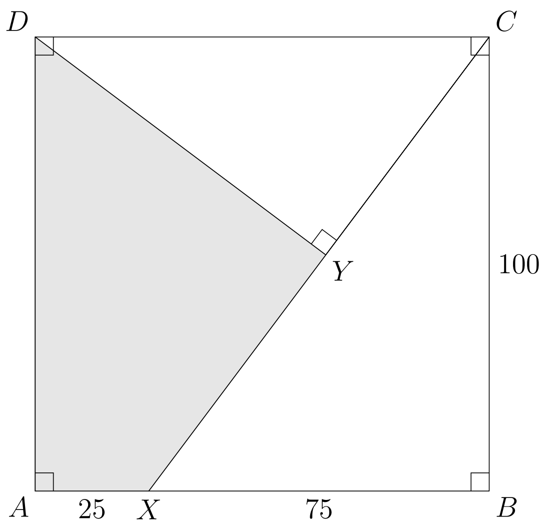
c) Von einer charakteristischen Getränkeflasche mit 1 l Inhalt und 24 cm Höhe wird für einen Souvenirshop ein verkleinerte (ähnliche) Version von 8 cm Höhe hergestellt. Wie viel Inhalt hat die verkleinerte Flasche? Wie viel mal kleiner wird die Etikette?

Ähnlichkeit

Aufgabe 11.27 In der folgenden Zeichnung halbiert die Strecke $[AC]$ den Winkel $\sphericalangle(BAD$. Die Längen der Strecken x und y sind in der Zeichnung angegeben. Berechnen Sie die Länge der Strecke z.



Aufgabe 11.28 Berechnen Sie den Inhalt der grauen Fläche!
(Beachte: Zwei Dreiecke sind auch dann ähnlich, wenn die drei gleichen Winkel in den beiden Dreiecken in unterschiedlicher Reihenfolge auftauchen.)



Nicht in Papierform verteilt:

Aufgabe 11.29 Geometrisches Multiplizieren und Dividieren: Gegeben sind zwei Strecken a und b und zusätzlich ist eine Einheitsstrecke (= eine Strecke der Länge eins) gegeben.

a) Geometrisches Multiplizieren: Konstruieren Sie eine Länge der Strecke $x = ab$ mit Hilfe des ersten Strahlensatzes.
Hinweis: Die Gleichung $x = ab$ lässt sich auch als $x \cdot 1 = ab$ oder $\frac{x}{b} = \frac{a}{1}$ schreiben.

b) Testen Sie ihre Konstruktion an einem Beispiel, indem Sie a und b und x mit dem Lineal oder Geodreieck abmessen.
Achtung: Wenn ihre Einheitsstrecke nicht 1 cm lang ist, müssen Sie a und b und x in Vielfachen der Einheitsstrecke messen.

c) Geometrisches Dividieren: Konstruieren Sie eine Länge der Strecke $y = \frac{a}{b}$ mit Hilfe des ersten Strahlensatzes.
Hinweis: Die Gleichung $y = \frac{a}{b}$ lässt sich auch als $\frac{y}{1} = \frac{a}{b}$ schreiben.

d) Testen Sie ihre Konstruktion wieder durch Abmessen an einem Beispiel.

11.5 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 11.8 ex-dreiecksflaechen-strecken

a)-d) : Die Dreiecksfläche ist $F = \frac{g \cdot h}{2}$, wobei g eine Grundseite und h die zugehörige Höhe ist.

Es gelten $g' = \lambda g$ und $h' = \lambda h$ (die zweite Gleichung verwendet die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke «links» der beiden Höhen h und h'; da die dem Höhenfusspunkt gegenüberliegende Seite mit dem Faktor λ gestreckt wird, ist der Streckfakor zwischen diesen beiden Dreiecken ebenfalls λ), also $F' = \frac{g' \cdot h'}{2} = \frac{\lambda g \cdot \lambda h}{2} = \lambda^2 \frac{g \cdot h}{2} = \lambda^2 F$.

Damit sind die Antworten: a) 9, b) 16, c) $\frac{1}{100}$ und d) λ^2.

e): Jedes Viereck lässt sich in zwei Dreiecke zerlegen. Damit ist die Antwort ebenfalls λ^2.

f): Sei s die Seitenlänge. Es gilt $s' = \frac{1}{2}s$. Damit ist $V' = s'^3 = (\frac{1}{2}s)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 s^3 = \frac{1}{2^3}V = \frac{1}{8}V$. Das Volumen wird also mit dem Faktor $\frac{1}{8}$ multipliziert.

Für die neue Oberfläche gilt $O' = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}s\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 6s^2 = \frac{1}{2^2}O = \frac{1}{4}O$. Die Oberfläche wird also mit dem Faktor $\frac{1}{2}^2 = \frac{1}{4}$ multipliziert.

g): Sei s die Seitenlänge. Es gilt $s' = \lambda s$. Damit ist $V' = s'^3 = (\lambda s)^3 = \lambda^3 s^3 = \lambda^3 V$. Das Volumen wird also mit dem Faktor λ^3 multipliziert.

Für die Oberfläche gilt $O' = 6 \cdot (\lambda s)^2 = \lambda^2 6s^2 = \lambda^2 \cdot O$. Die Oberfläche wird also mit dem Faktor λ^2 multipliziert.

Lösung zu Aufgabe 11.9 ex-dina-papier

a) Fläche wird verdoppelt, also $\lambda^2 = 2$ und damit $\lambda = \sqrt{2}$. (Die negative Lösung der Gleichung ignorieren wir hier.)

b) Sei ℓ die längere Seite (alias Länge) und b die kürzere Seite (alias Breite) eines A5-Blatts.
Nach der vorigen Teilaufgabe hat das A4-Blatt die Breite $\sqrt{2}b$ und diese ist (wegen des Nebeneinanderlegens) so gross wie die Länge ℓ des A5-Blatts, d.h.

$$\ell = \sqrt{2}b$$

Das gesuchte Verhältnis ist also

$$\frac{\ell}{b} = \frac{\sqrt{2}b}{b} = \sqrt{2}.$$

Alternative (über die Länge statt die Breite des A4-Blatts): Nach der vorigen Teilaufgabe hat das A4-Blatt die Länge $\sqrt{2}\ell$ und diese Länge ist das Doppelte der Breite des A5-Blatts, d.h. $\sqrt{2}\ell = 2b$ oder gleichbedeutend $\ell = \frac{2}{\sqrt{2}}b = \sqrt{2}b$. Das gesuchte Verhältnis ist also $\frac{\ell}{b} = \frac{\sqrt{2}b}{b} = \sqrt{2}$.

c) Wenn einem klar ist, dass bei Streckungen Verhältnisse gleich bleiben, folgt aus der Aufgabenstellung, dass dieses Verhältnis dassselbe ist wie beim A4-Blatt, welches wir gerade berechnet haben, also $\sqrt{2}$.
Die Rechnung geht so: Mit der Notation der vorigen Teilaufgabe ist das gesuchte Verhältnis $\frac{\sqrt{2}\ell}{\sqrt{2}b} = \frac{\ell}{b} = \sqrt{2}$.

d) Aus den vorigen Teilaufgaben folgt: Bei allen A-Bögen beträgt das Verhältnis von längerer zu kürzerer Seite $\sqrt{2}$.
Sei x die kurze Seite eines A0-Blatts in m. Die Länge seiner langen Seite ist damit $\sqrt{2}x$. Da seine Fläche $1\ m^2$ ist, folgt

$$\begin{aligned} x\cdot\sqrt{2}x &= 1 && \mid :\sqrt{2}\\ x^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\\ x &= \pm\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}\approx\pm 0.8409 \end{aligned}$$

Die negative Zahl ist geometrisch sinnlos. Also beträgt die Länge der kurzen Seite ungefähr 0.8409 m und die der langen Seite ungefähr $\sqrt{2}\cdot 0.8409 = 1.1892$ m.

Lösung zu Aufgabe 11.10 ex-erde-mond-volumen
Streckungsfaktor $\lambda = 3.67$. Die Oberfläche ist damit $\lambda^2\approx 13.47$ mal grösser, das Volumen $\lambda^3\approx 49.43$ mal grösser.

Lösung zu Aufgabe 11.11 ex-sektglas
Die verschiedenen Füllstände des Glases entsprechen verschiedenen Kegeln, die durch Streckung ineinander übergeführt werden können. Das volle Glas muss so gestreckt werden, dass sich das Volumen halbiert. Für den Streckungsfaktor gilt also:

$$\begin{aligned} \lambda^3 &= \frac{1}{2} && \mid \sqrt[3]{\cdot}\\ \lambda &= \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\approx 0.7937 \end{aligned}$$

Das Glas muss also bis knapp 80% der Höhe gefüllt werden!

Bemerkung: Die hier verwendete *dritte Wurzel* $\sqrt[3]{a}$ *einer reellen Zahl* a ist per Definition diejenige reelle Zahl, deren dritte Potenz a ist.

Lösung zu Aufgabe 11.12 ex-gartenzwerge
Durch Streckung mit dem Faktor $\lambda=\frac{3}{2}$ bzw. $\mu=2$ erhält man aus dem kleinen Modell das mittlere, bzw. das grosse. Das Volumen und damit das Gewicht wird also mit λ^3 bzw. μ^3 multipliziert.

Gewicht 15 cm Modell: $\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot 0.6\text{ kg} = \frac{27}{8}\cdot 0.6\text{ kg} = 2.025\text{ kg}$.

Gewicht 20 cm Modell: $2^3\cdot 0.6\text{ kg} = 4.8\text{ kg}$.

Vom grossen Modell zu den anderen sind die Streckfaktoren $\lambda=\frac{1}{2}$ bzw. $\mu=\frac{3}{4}$. Die Oberflächen und damit der Farbbedarf werden also mit λ^2 bzw. μ^2 multipliziert.

Farbe für das 15 cm Modell: $\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot 50\text{ ml} = 28.125\text{ ml}$

Farbe für das 10 cm Modell: $\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 50\text{ ml} = 12.5\text{ ml}$.

Lösung zu Aufgabe 11.13 ex-dina-quader
Gemeint ist, dass alle Quader der „3-dimensionalen A-Serie“ zueinander ähnlich sein sollen und je zwei entlang der grössten Seitenfläche nebeneinandergelegte Quader den nächsten Quader (mit der um eins kleineren Nummer) ergeben sollen und das Volumen des A0-Quaders $1\ m^3$ sein soll (dies ist eine Normierung).

Der Streckfaktor ist $\lambda=\sqrt[3]{2}$.

Wenn der A5-Quader die Seitenlängen $a\leq b\leq c$ hat, so hat der A4-Quader die Seitenlängen $b\leq c$ und $2a$ (wegen der Nebeinanderlegprozedur). Auf Grund der Ähnlichkeit der beiden Quader muss $c\leq 2a$ gelten (genaues Argument dem Leser überlassen). Da der A4-Quader durch Streckung mit dem Faktor $\sqrt[3]{2}$ aus dem A5-Quader entsteht, (hat er die Seitenlängen $\sqrt[3]{2}a\leq\sqrt[3]{2}b\leq\sqrt[3]{2}c$ und somit) muss gelten

$$b=\sqrt[3]{2}a \text{ und } c=\sqrt[3]{2}b=\sqrt[3]{2}^2a=\sqrt[3]{4}a$$

Ist x die kürzeste Seitenlänge des A0-Quaders (in Metern gemessen), so sind seine anderen Seitenlängen $\sqrt[3]{2}x$

und $\sqrt[3]{2}^2 x$. Auf Grund der Normierung des Volumens dieses Quaders gilt

$$\begin{aligned} 1 &= x \cdot \sqrt[3]{2} \cdot x \cdot \sqrt[3]{2}^2 \cdot x = 2x^3 && \mid :2 \\ \frac{1}{2} &= x^3 && \mid \sqrt[3]{} \\ x &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0.7937. \end{aligned}$$

Die Seitenlängen des A0-Quaders betragen als $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ und 1 und $\sqrt[3]{2}$ (jeweils in Metern).

Lösung zu Aufgabe 11.14 ex-strahlensaetze-umgeschrieben

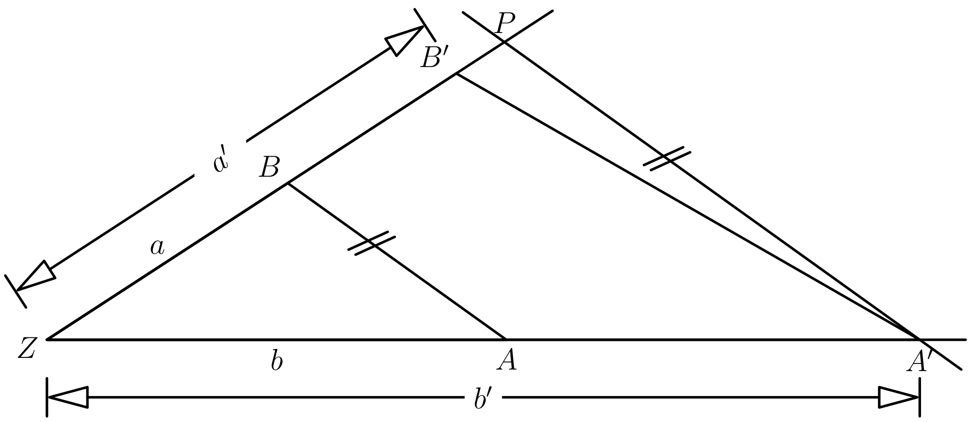
Die vier Verhältnisgleichungen ergeben sich aus den Strahlensätzen durch Vertauschen geeigneter Innenglieder.

Die drei genannten Verhältnisgleichungen besagen: In den beiden (zueinander ähnlichen) Dreiecken $\triangle ABZ$ und $\triangle A'B'Z$ sind einander entsprechende Verhältnisse der Seiten gleich.

Sind zwei Dreiecke ähnlich, so kann man das eine Dreieck so verschieben, dass die beiden Dreiecke so ineinander liegen wie im Setting der Strahlensätze – für diese beiden ähnlichen Dreiecke stimmen einander entsprechende Seitenverhältnisse überein, wie gerade erklärt. Da sich beim Verschieben die Seitenlängen und deren Verhältnisse nicht ändern, folgt der Inhalt der Merkebox.

Lösung zu Aufgabe 11.15 ex-umkehrung-erster-strahlensatz

Wir nehmen an, dass $a : a' = b : b'$ gilt. Zeichne die Parallele zu (AB) durch A'. Ihren Schnittpunkt mit (ZB) nennen wir P wie in der folgenden, «absichtlich leicht falschen» Zeichnung (die aber den Beweis besser illustriert als die korrekte Zeichnung, wie wir sehen werden).



Der erste Strahlensatz und unsere Annahme liefern $a : \overline{ZP} = b : b' = a : a'$. Daraus folgt $a : \overline{ZP} = a : a'$ und somit $\overline{ZP} = a' = \overline{ZB'}$. Da P und B' auf demselben, von Z ausgehenden *Strahl* (und nicht nur auf derselben Geraden durch Z) liegen, folgt $P = B'$. Nach Konstruktion von P sind (AB) und $(A'P) = (A'B')$ parallel.

Bemerkung: Die Umkehrung des ersten Strahlensatzes und der erste Strahlensatz selbst zeigen, dass zentrische Streckungen Geraden auf dazu parallele Geraden abbilden. Insbesondere erhalten zentrische Streckungen Winkel.

Lösung zu Aufgabe 11.16 ex-flussbreite

Seien die Punkte A und B die Bootsenden. Sei P derjenige Punkt am diesseitigen Flussufer, der dem Punkt A genau gegenüber liegt (näherungsweise per Augenmass bestimmt). Man bestimme den Punkt Q auf dem eigenen Flussufer so, dass $\overline{PQ} = 2$ m und Q, P und A auf einer Linie liegen. Dann bestimmt man den Punkt R am Flussufer so, dass Q, R und B auf einer Linie liegen. Man misst die Strecke $\overline{PR} = d$ mit Hilfe der kleinen Stöcke so genau wie möglich.

Betrachte nun die beiden vom Scheitel Q ausgehenden Strahlen in Richtung A und B und die beiden Flussufer als Parallelen (was näherungsweise gilt). Damit gilt der 2. Strahlensatz und man erhält eine Gleichung für die gesuchte Rheinbreite $\overline{PA}$:

$$\begin{aligned}
\overline{QP} : d &= \overline{QA} : \overline{AB} \\
\overline{QP} \cdot \overline{AB} &= d \cdot \overline{QA} \\
2 \cdot 10 &= d \cdot (2 + \overline{PA}) && | -2d \\
20 - 2d &= d \cdot \overline{PA} && | : d \\
\frac{20-2d}{d} &= \overline{PA}
\end{aligned}$$

Beispiel: Wenn $d = 0.4$ m gilt, dann ist der Fluss an dieser Stelle ca. 48 m breit.

Lösung zu Aufgabe 11.17 ex-eiffelturm

Sei A der Augpunkt, l die Distanz vom Auge zum Daumen, d die Höhe der Faust mit Daumen und h die Höhe des Eiffelturms und x die gesuchte Entfernung vom Augpunkt A zum Eiffelturm (alle Entfernungen in Metern). Wenn man annimmt, dass ihr Daumen senkrecht nach oben zeigt (und somit d und h parallel sind) und ihr Arm waagerecht gehalten ist, gilt der zweite Strahlensatz:

$$\begin{aligned}
l : d &= x : h \\
lh &= dx && | : d \\
\frac{lh}{d} &= x
\end{aligned}$$

Ungefähre Werte (in m): $l = 0.5$, $d = 0.15$ und $h = 330$. Damit ergibt sich eine Distanz von $x =$1100 m.

Implizit nehmen wir hier an, dass ihr Arm sich auf derselben Höhe über dem Meer wie der Fusspunkt des Eiffelturms befindet. Wo wird dies verwendet?

Lösung zu Aufgabe 11.18 ex-baumhoehe

Mit der 2m-Latte wird eine Distanz d von z.B. 12 m vom Baum abgemessen (oder etwas mehr oder weniger, je nach Baumhöhe). In etwa der Mitte der Latte wird der Massstab rechtwinklig zur Latte fixiert. Man stellt die Latte senkrecht auf den Boden und positioniert sein Auge am Ende des Massstabs, Blick in Richtung Baum. Sei der Abstand zwischen Auge und Latte a (z.B. 0.3 m). Mit dem Bleistift makiert man auf der Latte jene Stellen, wo man die Wurzel und die Spitze des Baumes sieht. Die Distanz dieser Stellen sei b. Es gilt der zweite Strahlensatz, wobei h die Baumhöhe ist:

$$a : (a+d) = b : h \qquad \Leftrightarrow \qquad h = \frac{b(a+d)}{a}.$$

Genau genommen wird der Strahlensatz zwei Mal angewendet, wobei man 3 Geraden durch einen Scheitel hat (2 Sichtlinien und eine Horizontale). Das Verhältnis der Horizontalen Strecke überträgt sich auf das Verhältnis der Sichtlinen und damit jenes auf die Parallelen (Baum und Dachlatte).

Beispiel: $d = 12$ m, $a = 0.3$ m, $b = 1$ m. Also $h \approx 41$ m.

Alternative: Befestige den Massstab senkrecht am Ende der Dachlatte und bewege dich soweit vom Baum weg, dass der Massstab gerade den Baum vollständig verdeckt (Augpunkt am anderen Ende der Dachlatte, Dachlatte waagerecht halten, am besten auf dem Boden). Miss mit der Dachlatte den Abstand vom Augpunkt zum Baum. Dann Baumhöhenbestimmung mit dem Strahlensatz ähnlich wie bei der Eiffelturm-Aufgabe.

Lösung zu Aufgabe 11.19 ex-streckendreiteilung

Man zeichne einen beliebigen, von A ausgehenden Strahl ein (der nicht durch den Punkt B geht). Man trage auf diesem Strahl dreimal eine beliebig lange, fix gewählte Strecke ab. Man verbinde den letzten Punkt mit B und ziehe Parallelen durch die anderen beiden abgetragenen Punkte. Diese beiden Parallelen teilen $[AB]$ in drei gleiche Teile (nach dem ersten Strahlensatz!).

Lösung zu Aufgabe 11.20 ex-eins-zu-wurzel2

Man konstruiert ein beliebiges gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck. Das Verhältnis von Kathete zu Hypotenuse ist $1 : \sqrt{2}$. Dieses Verhältnis kann nun mit Hilfe des ersten Strahlensatzes übertragen werden (wie in der vorigen Aufgabe: Trage zuerst die Kathete auf dem neuen Strahl ab und danach die Hypotenuse).

Lösung zu Aufgabe 11.21 ex-streckenteilung-in-verhaeltnis

Man zeichne einen beliebigen, von A ausgehenden Strahl ein (der nicht durch den Punkt B geht). Man trage auf diesem Strahl sechsmal ($6 = 2+3+1$) eine beliebig lange, fix gewählte Strecke ab und nenne den letzten Punkt C. Markiere von A ausgehend die Punkte «nach zwei Strecken» und «nach drei weiteren Strecken» auf dem Strahl. Man verbinde den Punkt C mit B und ziehe Parallelen (zu dieser Verbindungslinie) durch die beiden markierten Punkte. Diese beiden Parallelen teilen $[AB]$ im gesuchten Verhältnis (zumindest ist das intuitiv klar).

Genaue Begründung: Dass das Verhältnis der ersten zur zweiten Strecke $2 : 3$ ist, folgt sofort aus dem ersten Strahlensatz. Dass das Verhältnis der zweiten zur dritten Strecke $3 : 1$ ist, ist hingegen nicht sofort klar. Klar ist aber nach dem ersten Strahlensatz, dass das Verhältnis von der Summe der ersten beiden Strecken zur dritten Strecke $5 : 1$ ist. Die letzte Strecke passt als fünfmal in die Summe der ersten beiden Strecken. Weil letztere im Verhältnis $2 : 3$ stehen, passt die letzte Strecke dreimal in die zweite Strecke, d.h. das Verhältnis von zweiter zu dritter Strecke ist $3 : 1$.

Abstrakte Begründung in allgemeiner Situation: Von einem Punkt gehen zwei Strahlen aus, die von drei parallelen Geraden geschnitten werden. Wir nennen die «ausgeschnittenen Stücke» auf dem einen Strahl a, b, c und die auf dem anderen Strahl x, y, z. Dann ist $b : c = y : z$ zu zeigen.

Der erste Strahlensatz liefert

$$(a + b) : c = (x + y) : z \text{ und } a : (b + c) = x : (y + z) \text{ und } a : b = x : y$$

oder äquivalent

$$az + bz = cx + cy \text{ und } ay + az = bx + cx \text{ und } ay = bx.$$

Zieht man die letzte von der vorletzten Gleichung ab, so erhält man $az = cx$, was von der ersten Gleichung abgezogen $bz = cy$ ergibt oder äquivalent $b : c = y : z$ wie gewünscht.

Lösung zu Aufgabe 11.22 ex-strahlensatz-einfach

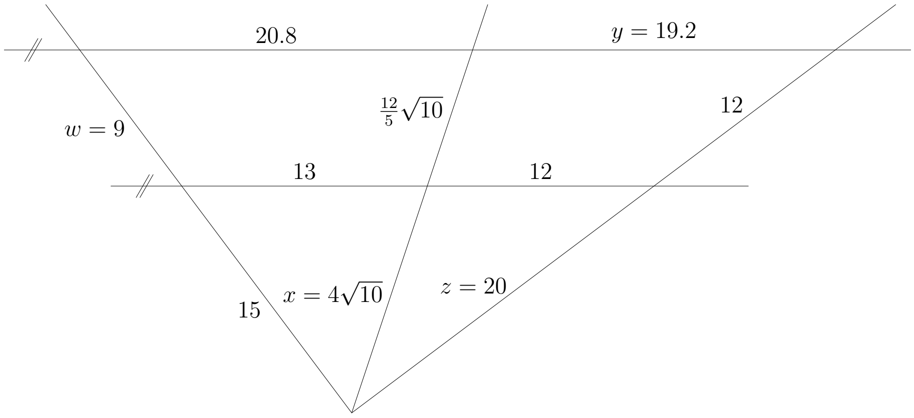
a) Gegeben: $a = 5$, $b = 2$, $c = 4$, $c' = 5$. Lösung:
$a' : a = c' : c$, also $a' = \frac{ac'}{c} = \frac{5\cdot 5}{4} = \frac{25}{4}$
$a'' = a' - a = \frac{25}{4} - 5 = \frac{5}{4}$.
$b' : b = c' : c$, also $b' = \frac{bc'}{c} = \frac{2\cdot 5}{4} = \frac{5}{2}$
$b'' = b' - b = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$

b) Gegeben: $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{5}{3}$, $b' = \frac{25}{9}$, $c = \frac{4}{3}$. Lösung:
$a : a' = b : b'$, also $a' = \frac{ab'}{b} = \frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{25}{9}}{\frac{5}{3}} = \frac{25}{6}$
$b'' = b' - b = \frac{25}{9} - \frac{5}{3} = \frac{10}{9}$.
$a'' = a' - a = \frac{25}{6} - \frac{5}{2} = \frac{5}{3}$. Alternative: Aus $a'' : a = b'' : b$ folgt $a'' = \frac{ab''}{b} = \frac{\frac{5}{2}\frac{10}{9}}{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}$.
$c' : c = a' : a$, also $c' = \frac{a'c}{a} = \frac{\frac{25}{6}\cdot\frac{4}{3}}{\frac{5}{2}} = \frac{20}{9}$.

c) Gegeben: $a' = \frac{25}{9}$, $b' = \frac{20}{9}$, $b'' = \frac{8}{9}$, $c' = \frac{10}{9}$. Lösung:
$b = b' - b'' = \frac{20}{9} - \frac{8}{9} = \frac{4}{3}$
$a : a' = b : b'$, also $a = \frac{a'b}{b'} = \frac{\frac{25}{9}\cdot\frac{4}{3}}{\frac{20}{9}} = \frac{5}{3}$
$a'' : a' = b'' : b'$, also $a'' = \frac{a'b''}{b'} = \frac{\frac{25}{9}\cdot\frac{8}{9}}{\frac{20}{9}} = \frac{10}{9}$
$c : c' = a : a'$, also $c = \frac{ac'}{a'} = \frac{\frac{5}{3}\cdot\frac{10}{9}}{\frac{25}{9}} = \frac{2}{3}$.

Bemerkung: Zur Lösung jeder dieser Aufgaben genügt es, nur die vier Gleichungen $a : a' = b : b' = c : c'$ und $a' = a + a''$ und $b' = b + b''$ zu benuten. Wenn diese nämlich gelten, gilt beispielsweise $a : a'' = b : b''$ automatisch, denn aus $a : a' = b : b'$ folgt $ab' = a'b$, daraus $a(b + b'') = (a + a'')b$, daraus $ab + ab'' = ab + a''b$, daraus $ab'' = a''b$ und daraus $a : a'' = b : b''$.

Lösung zu Aufgabe 11.23 ex-strahlensatz-einfach-zahlen-in-skizze-exakt



Lösung zu Aufgabe 11.24 ex-verhaeltnisse-aus-geometrie

Wir betrachten ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a. Nach Pythagoras ist seine Höhe

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Das gesuchte Verhältnis ist also $h : a = \frac{h}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} : 2 \approx 0.866$.

Lösung zu Aufgabe 11.25 ex-st-gallen-flaeche-auf-karte

1. Lösungsweg: Die Karte entsteht aus der (hier als flach angenommen) realen Landschaft durch eine Streckung mit Streckfaktor $\lambda = \frac{1}{300'000} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10^5} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-5}$. Die Fläche auf der Karte (= neue Fläche = Fläche des *Bildkantons*) entsteht aus der realen Fläche (= alte Fläche = Fläche des *Originalkantons*) durch Multiplikation mit dem Faktor λ^2, d.h. die gesuchte Fläche auf der Karte ist

$$\begin{aligned}\lambda^2 \cdot 2028.2\ \text{km}^2 &= \left(\frac{1}{3} \cdot 10^{-5}\right)^2 \cdot 2028.2\ \text{km}^2 = \frac{1}{9} \cdot 10^{-10} \cdot 2028.2\ \text{km}^2 \\ &= \frac{1}{9} \cdot 10^{-10} \cdot 2028.2 \cdot (10^5\ \text{cm})^2 = \frac{1}{9} \cdot 10^{-10} \cdot 2028.2 \cdot 10^{10}\ \text{cm}^2 = \frac{1}{9} \cdot 2028.2\ \text{cm}^2 \approx 225.35\ \text{cm}^2\end{aligned}$$

2. Lösungsweg: (wohl eine Art Dreisatz, die erste Zeile ist einfacher von rechts her zu lesen)

$$\begin{aligned} 300'000\ \text{cm} = 3'000\ \text{m} = 3\ \text{km in der Realität} \quad &\widehat{=} \quad 1\ \text{cm auf der Karte} \\ 1\ \text{km in der Realität} \quad &\widehat{=} \quad \frac{1}{3}\ \text{cm auf der Karte} \\ 1\ \text{km}^2\ \text{in der Realität} \quad &\widehat{=} \quad \frac{1}{9}\ \text{cm}^2\ \text{auf der Karte} \\ 2028.2\ \text{km}^2\ \text{in der Realität} \quad &\widehat{=} \quad 2028.2 \cdot \frac{1}{9}\ \text{cm}^2 \approx 225.35\ \text{cm}^2\ \text{auf der Karte} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 11.26 ex-flaeche-und-volumen

a) Die Fläche wird mit dem Faktor λ^2 multipliziert, wobei λ der gesuchte Streckfaktor ist. Damit ist $\lambda^2 = \frac{1}{3}$ und somit müssen die Längen mit $\lambda = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ multiplizert werden.

b) Die Fläche wird mit dem Faktor λ^2 multipliziert, wobei λ der gesuchte Streckfaktor ist. Damit ist $\lambda^2 = 3$ und somit müssen die Längen mit $\lambda = \sqrt{3}$ multiplizert werden.

c) Der Streckfaktor ist $\lambda = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$. Damit ist das Volumen $1\ \text{l} \cdot \lambda^3 = \frac{1}{27}$ l. Die Fläche der Etikette wird mit $\lambda^2 = \frac{1}{9}$ multipliziert, wird also 9 mal kleiner.

Lösung zu Aufgabe 11.27 ex-zwei-aehnliche-rechtwinklige-dreiecke-aufeinander

Laut Voraussetzung sind die beiden Winkel bei A gleich gross. Folglich und wegen der eingezeichneten rechten Winkel sind die beiden Dreieck $\triangle ABC$ und $\triangle ACD$ ähnlich. Mit der Bezeichnung $t = \overline{AC}$ gilt also

$$\frac{y}{t} = \frac{t}{x} \quad \text{also} \quad t^2 = xy = 6400 \quad \text{also} \quad t = 80$$

Mit Pythagoras berechnen wir

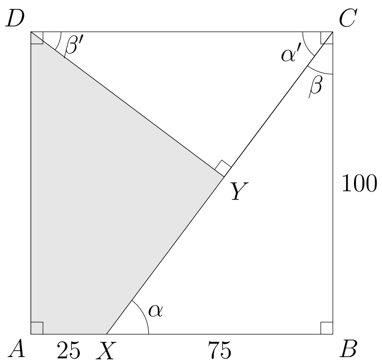
$$z = \sqrt{y^2 - t^2} = \sqrt{10'000 - 6'400} = \sqrt{3'600} = 60.$$

Lösung zu Aufgabe 11.28 ex-flaeche-viereck

Die beiden Dreiecke $\triangle XBC$ und $\triangle YCD$ sind ähnlich, denn beide haben einen rechten Winkel und es gilt

$$\alpha = 180° - 90° - \beta = 90° - \beta = \alpha'$$

und somit auch $\beta = \beta'$.



Die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $\triangle XBC$ hat nach Pythagoras die Länge

$$\overline{XC} = \sqrt{100^2 + 75^2} = 125$$

(Es entsteht aus dem wohlbekannten rechtwinkligen Dreieck mit Seitenlängen 3, 4, 5 durch Streckung mit dem Faktor 25.)

Rest der Lösung per Streckung: Der Streckfaktor vom grossem zum kleinem Dreieck ist

$$\lambda = \frac{\text{Hypotenuse im kleinen Dreieck}}{\text{Hypotenuse im grossen Dreieck}} = \frac{100}{125} = \frac{4}{5} = 0.8.$$

(Genaugenommen muss man mit diesem Faktor strecken und zusätzlich an einer Dreiecksseite spiegeln.) Das grosse Dreieck hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 75 = 3'750$, das kleine somit den Flächeninhalt $\lambda^2 \cdot 3'750 = 2'400$. Die graue Fläche hat somit den Inhalt $10'000 - 3'750 - 2'400 = 3'850$.

Rest der Lösung per Berechnung der Katheten des kleinen Dreiecks: Wegen der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke gilt

$$\frac{\text{Seite gegenüber } \alpha'}{\text{Seite gegenüber } \alpha} = \frac{\text{Seite gegenüber } \beta'}{\text{Seite gegenüber } \beta} = \frac{\text{Hypotenuse im kleinen Dreieck}}{\text{Hypotenuse im grossen Dreieck}}$$

bzw. durch Einsetzen der bekannten Werte

$$\frac{\overline{DY}}{100} = \frac{\overline{CY}}{75} = \frac{100}{125} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Daraus berechnet man die Länge der beiden Katheten des kleinen Dreiecks zu

$$\overline{DY} = 100 \cdot \frac{4}{5} = 80 \qquad \text{und} \qquad \overline{CY} = 75 \cdot \frac{4}{5} = 60.$$

Der graue Flächeninhalt ist die Fläche des Quadrats minus die Fläche der beiden Dreiecke, also

$$100^2 - \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 75 - \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 60 = 3'850.$$

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Lösung zu Aufgabe 11.29 ex-geometrisch-multiplizieren-und-dividieren-mit-strahlensatz

(a) Zeichne von einem Punkt Z ausgehend zwei verschiedene Strahlen. Trage auf dem einen Strahl zuerst die Länge 1 ab (neuer Punkt E) und dann die Länge a (neuer Punkt A). Trage auf dem anderen Strahl die Länge b ab (neuer Punkt B). Verbinde E und B und zeichne die Parallele zu dieser Verbindungslinie durch A. Ihr Schnittpunkt mit dem anderen Strahl sei X. Dann hat $x := \overline{BX}$ die gesuchte Länge, denn nach dem ersten Strahlensatz gilt $x : b = a : 1$ oder äquivalent $x = ab$.

(c) Zeichne von einem Punkt Z ausgehend zwei verschiedene Strahlen. Trage auf dem einen Strahl zuerst die Länge b ab (neuer Punkt B) und dann die Länge a (neuer Punkt A). Trage auf dem anderen Strahl die Länge 1 ab (neuer Punkt E). Verbinde E und B und zeichne die Parallele zu dieser Verbindungslinie durch A. Ihr Schnittpunkt mit dem anderen Strahl sei X. Dann hat $x := \overline{EX}$ die gesuchte Länge, denn nach dem ersten Strahlensatz gilt $x = x : 1 = a : b = \frac{a}{b}$.