Aufgabe A7 Welche Höhe und welchen Radius hat eine Büchse mit 1 l (Liter) Volumen und minimaler Oberfläche?

- **Stellgrösse**:
$$h = \text{Höhe in dm} \qquad (\text{wobei } h > 0)$$
- Weitere Variable: r = Radius der Grundfläche in dm.
- **Zielgrösse**:
$$O = (\text{Oberfläche in dm}^2) = (\text{Aussenfläche plus zweimal Kreisfläche}) = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$
(Dies ist eine von h und r abhängige Funktion.)
- **Nebenbedingung**: Die Formel für das Volumen ist
$$V = (\text{Kreisfläche mal Höhe}) = \pi r^2 \cdot h$$
Das Volumen soll 1 l = 1 dm^3 betragen. Die Nebenbedingung ist also $V = 1$, d. h.
$$\pi r^2 h = 1$$
Diese Gleichung zeigt, wie Höhe h und Radius r zusammenhängen.

Wir möchten die Oberfläche als Funktion unserer Stellgrösse, also der Höhe h, angeben (statt als Funktion von h und r). Dazu lösen wir die Nebenbedingung nach r auf:

$$\pi r^2 h = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad r^2 = \frac{1}{\pi h} \quad \Longleftrightarrow \quad r = \frac{1}{\sqrt{\pi h}} = \pi^{-\frac{1}{2}} \cdot h^{-\frac{1}{2}}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} O(h) &= 2\pi r h + 2\pi r^2 \\ &= 2\pi \frac{1}{\sqrt{\pi h}} h + 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{\pi h}}\right)^2 \\ &= 2\sqrt{\pi}^2 \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{h}} \sqrt{h}^2 + 2\pi \frac{1}{\pi h} \\ &= 2\sqrt{\pi}\sqrt{h} + \frac{2}{h} \\ &= 2\sqrt{\pi} \cdot h^{\frac{1}{2}} + 2h^{-1} \end{aligned}$$

Wir suchen jenes h, das zu minimaler Oberfläche führt. Dazu leiten wir $O(h)$ nach h ab und setzen dann Null (horizontale Tangente).

- Ableiten:

$$\begin{aligned} O'(h) &= 2\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2} h^{\frac{1}{2}-1} + 2 \cdot (-1) h^{-2} \\ &= 2\sqrt{\pi} \frac{1}{2\sqrt{h}} + 2 \cdot (-1) h^{-2} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{h}} - \frac{2}{h^2} \end{aligned}$$

- Ableitung Nullsetzen und nach h auflösen, d. h. $O'(h) = 0$ nach h auflösen: ✎

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{h}} - \frac{2}{h^2} &= 0 && \Big| + \frac{2}{h^2} \\
\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{h}} &= \frac{2}{h^2} && \big|(\cdot)^2 \\
\frac{\pi}{h} &= \frac{4}{h^4} && \Big| \cdot \frac{h^4}{\pi} \text{ mit } h \neq 0 \\
h^3 &= \frac{4}{\pi} && \big| \sqrt[3]{\cdot} \\
h &= \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot \pi^{-\frac{1}{3}} \approx 1.084 \text{ in dm}
\end{aligned}
$$

Dieses h ist also ein Extremstellenkandidat. Mit dem Taschenrechner (oder durch Ausrechnen von Hand) erhält man $O''(\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} = \frac{3}{4}\pi > 0$. Also ist h eine Minimalstelle.

Aus der obigen Formel für r erhalten wir

$$r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \approx 0.5419 \qquad \text{genauer Wert: } r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} = 2^{-\frac{1}{3}} \cdot p^{-\frac{1}{3}}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Einige Zusatzbemerkungen:

- Bemerkenswert ist $h = 2r$, d.h. der «vertikale Querschnitt» der Büchse/des Zylinders mit minimaler Oberfläche ist ein Quadrat.
- Interessant ist auch die minimale Oberfläche:

$$O = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 \approx 5.536 \qquad \text{genauer Wert: } O = 3 \cdot \sqrt[3]{2\pi}$$

- Was passiert mit der Oberfläche für $h \to 0$ bzw. $h \to \infty$?
  - Für $h \to 0$ gilt
  $$O = 2\sqrt{\pi}\underbrace{\sqrt{h}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2}{h}}_{\to\infty} \qquad \to \infty$$
  Die Funktion verhält sich für sehr kleine positive h im Wesentlichen wie $\frac{2}{h}$.
  - Für $h \to \infty$ gilt
  $$O = 2\sqrt{\pi}\underbrace{\sqrt{h}}_{\to\infty} + \underbrace{\frac{2}{h}}_{\to 0} \qquad \to \infty$$
  Die Funktion verhält sich für sehr grosse positive h im Wesentlichen wie $2\sqrt{\pi}\sqrt{h}$.
- Interessant ist auch der Vergleich der Oberfläche unseres Zylinders (= der Büchse) mit anderen Körpern:
  - Die Oberfläche eines Würfels mit 1 l=1 dm^3 Inhalt ist ✎6 dm^2. (Seitenlänge des Würfels 1 dm)
  - Die Oberfläche einer Kugel mit 1 l=1 dm^3 Inhalt:
  Zuerst müssen wir den Radius r der Kugel bestimmen. Für das Volumen V der Kugel gilt $1 = V = \frac{4}{3}\pi r^3$, also $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$. Eingesetzt in die Oberflächenformel erhalten wir $O =$ ✎$4\pi r^2 \approx 4.836$ dm^2.

Praktische Anwendung: Um einen Liter Tomatensosse zu verpacken, ist eine kugelförmige Verpackung materialsparender als die beste zylinderförmige Verpackung, welche wiederum materialsparender als die würfelförmige Verpackung ist.

Man kann zeigen (isoperimetrische Ungleichung): Unter **allen** Verpackungen ist die kugelförmige die materialsparendste.

Aufgabe A8 Welche Höhe und Radius hat eine Büchse mit 1 l Volumen und minimaler Oberfläche? Lösen Sie die Aufgabe mit r (anstatt h) als Stellgrösse.