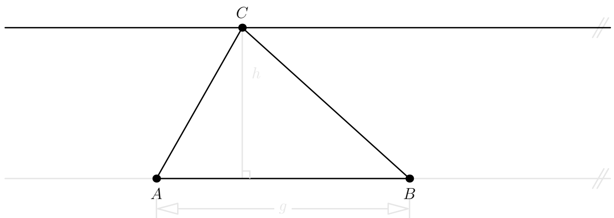
Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Vorbemerkung: Scherungen von Dreiecken und Parallelogrammen

eventuell Wiederholung an der Tafel: Flächeninhalt der folgenden Figuren: Rechteck, rechtwinkliges Dreieck, beliebiges Dreieck (Wenn das Lot von einem Punkt die Grundseite trifft: Zerlegung in zwei rechtwinklige Dreiecke; sonst: Differenz zweier rechtwinkliger Dreiecke), beliebiges Parallelogramm.

Merke Scheren von Dreiecken

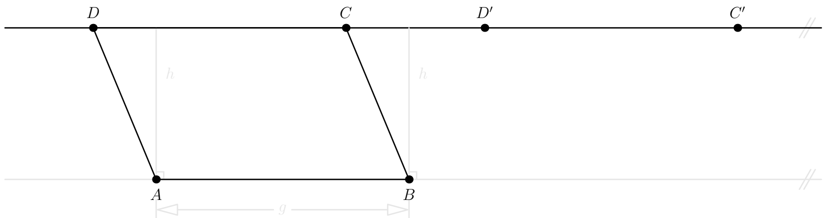
Sei ABC ein beliebiges Dreieck. Ist C' ein beliebiger Punkt auf der Parallelen zur Dreiecksseite $[AB]$ durch C, so ✎



Sprechweise: «Das Dreieck ABC' geht durch eine *Scherung* aus dem Dreieck ABC hervor.»

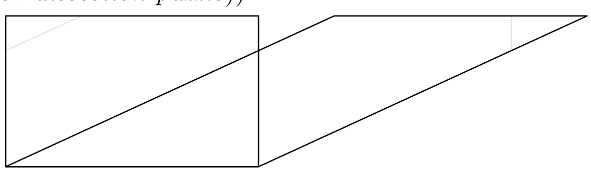
Merke Scheren von Parallelogrammen

Sei $ABCD$ ein beliebiges Parallelogramm. Dann hat jedes andere Parallelogramm mit derselben Grundseite $[AB]$, dessen weitere Eckpunkte C' und D' auf der Geraden (CD) liegen,

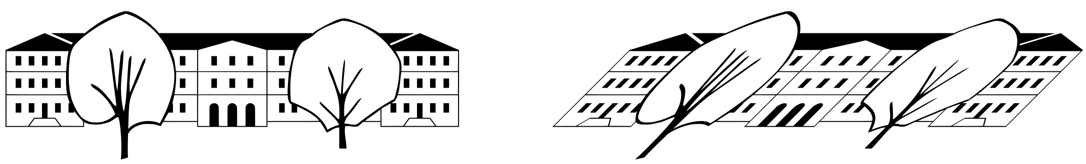


Sprechweise: «Das Parallelogramm $ABC'D'$ geht durch eine *Scherung* aus dem Parallelogramm $ABCD$ hervor.»

8.0.3 (Beweis per Zerlegungspuzzle (= Legepuzzle, englisch *dissection puzzle*))**.**
Einige kennen vielleicht Legepuzzle wie Tangram.
Wie rechts angedeutet, kann man jedes Parallelogramm in geeignete Puzzlesteine zerteilen und diese dann zu einem flächengleichen Rechteck mit derselben Grundseite zusammensetzen.
Somit liefert jede Scherung eines Rechtecks (oder Parallelogramms) ein Zerlegungspuzzle.



8.0.4. Zur Illustration des allgemeinen Begriff einer **Scherung** (den wir hier nicht formal definieren): Wendet man auf das Kanti-Logo eine geeignete Scherung an, so erhält man die rechte gescherte/«verzerrte» Version.



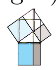
Merke 8.0.5 Scherungen sind flächentreu

Bei Scherungen bleiben *alle* Flächeninhalte erhalten.

9 Rechtwinklige Dreiecke (Pythagoras, Katheten-, Höhensatz)

9.1 Der Satz des Pythagoras

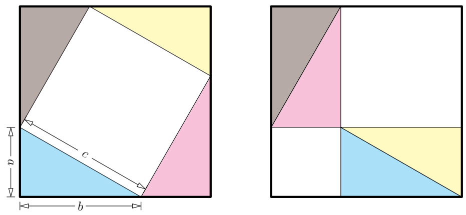
9.1.1 (Beweis des Satzes von Pythagoras ✎ durch Scherungen)**.**
An der Tafel: Satz des Pythagoras formulieren, Beweis mit Hilfe von Scherungen von Rechtecken bzw. Parallelogrammen (Dreieck mit Thaleskreis zeichnen; Parallelogramme mit Farben markieren (nur den Rand) statt Punkte zu benennen); mit Kongruenzsatz begründen, dass c die Höhe der beiden «oberen Rechtecke» ist, die deswegen so gross wie die «untern Rechtecke» sind.



Animation: https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras#Beweis_durch_Scherung

⚒ Aufgabe A1

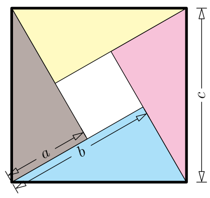
Drei weitere Beweise des Satzes von Pythagoras:



(a) Beweis durch Ergänzung: Erklären Sie, warum das rechts in zwei Anordnungen abgebildete «Lege-Puzzle» den Satz des Pythagoras beweist (gemeint sind die beiden abgebildeten Möglichkeiten, die vier zueinander kongruenten Puzzlesteine in dasselbe Quadrat zu legen).

(b) Beweis durch Berechnung einer Quadratfläche auf zwei Arten: Betrachten Sie nur die linke Figur mit den vier Puzzlesteinen in den Ecken des Quadrats. Berechnen Sie die Fläche des grossen Quadrats auf zwei Arten – dies liefert eine Gleichung. Folgern Sie daraus durch algebraische Umformungen den Satz des Pythagoras.

(c) Beweis durch Berechnung einer Quadratfläche auf zwei Arten. Berechnen Sie die Fläche des rechts abgebildeten (grossen) Quadrats auf zwei Arten. Folgern Sie daraus ähnlich wie oben den Satz des Pythagoras.



Aufgabe A2

Pythagoras-Puzzle: Verwenden Sie

- den an der Tafel erklärten Beweis des Satzes von Pythagoras durch Scherung und
- die in 8.0.3 erklärte Tatsache, dass Scherungen von Parallelogrammen Zerlegungspuzzle liefern,

um Legesteine zu erzeugen (etwa aus Papier/Holz/Plastik per 3D-Druck), mit denen man einerseits die beiden Quadrate über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks und andererseits das Quadrat über der Hypotenuse auslegen kann.

9.2 Standardbezeichnungen bei rechtwinkligen Dreiecken

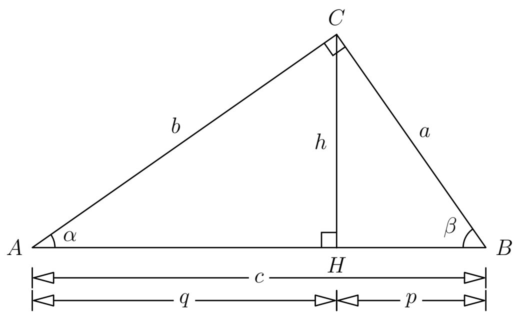
9.2.1. In jedem rechtwinkligen Dreieck nennt man

Etymologie (laut dwds.de):
- hypoteínein$_{\text{griech.}}$ (ὑποτείνειν) «darunter spannen, ausdehnen»; Hypotenuse wohl im Sinne von «die sich unter dem rechten Winkel ausdehnende Seite»
- káthetos$_{\text{griech.}}$ (κάθετος) «Senkrechte, Lot», eigentlich «die Herabgelassene»

- die dem rechten Winkel gegenüberligende Seite ✎
- die anderen beiden (am rechten Winkel anliegenden) Seiten ✎
- die Hypotenuse wird vom Höhenfusspunkt in zwei Teilstrecken zerlegt (siehe Skizze unten). Diese nennt man ✎

9.2.2 (Konventionen und Standardbezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck)**.** Der Eckpunkt beim rechten Winkel wird C genannt. Die anderen Eckpunkte, Seiten und Winkel werden wie üblich bezeichnet (mathematisch positiver Drehrsinn; $\gamma = 90°$).

- c ist die **Hypotenuse**
- a und b sind die **Katheten**
- Mit der **Höhe** meint man fast **immer** die Höhe $h = h_c$ über der Hypotenuse c.
- Der Fusspunkt H der Höhe h teilt die Hypotenuse in zwei **Hypotenusenabschnitte**, die man mit p und q bezeichnet, genauer gelten $p = [BH]$ und $q = [AH]$.
  Merkhilfe: p liegt bei a; q liegt bei b (alphabetische Reihenfolge)



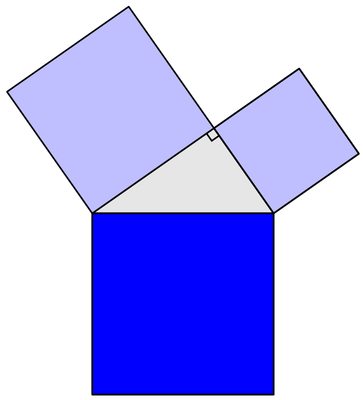
9.3 Sätze über rechtwinklige Dreiecke

9.3.1. Wir geben hier die wichtigsten Sätze über rechtwinklige Dreiecke in einer Art Zusammenfassung an, damit man sie sich auf einmal einprägen kann. Die Beweise werden an der Tafel erklärt. Weitere Beweise finden sich in den Aufgaben.

9.3.2. Für die alten Griechen waren die folgenden Sätze vorrangig Aussagen über den Flächeninhalt gewisser Quadrate und Rechtecke (was vermutlich vor allem daran lag, dass unsere elegante «moderne» Formelschreibweise damals noch nicht existierte). Dieser Aspekt wird in den folgenden Formulierungen besonders betont.

Satz 9.3.3 Satz des Pythagoras samt Umkehrung

Das Quadrat über der Hypotenuse jedes rechtwinkligen Dreiecks ist so gross wie die beiden Quadrate über den Katheten zusammen (hellblau = blau). ✎

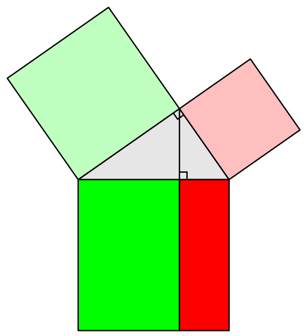


Umkehrung des Satzes des Pythagoras: In jedem Dreieck UVW gilt: ✎

Beachte: Die Gleichung $u^2 + v^2 = w^2$ kann nur dann gelten, wenn w die längste Seite ist.
Beweis der Umkehrung: An Tafel am Beginn des Abschnitts A14.

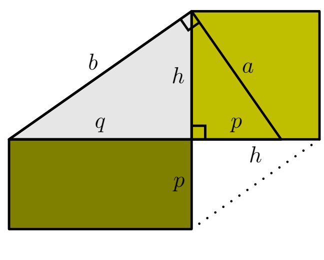
Satz 9.3.4 Kathetensatz

Das Quadrat über jeder Kathete ist so gross wie das Rechteck aus Hypotenuse und zugehörigem Hypotenusenabschnitt (hellrot = rot und hellgrün = grün). ✎



Satz 9.3.5 Höhensatz

Das Quadrat über der Höhe ist so gross wie das Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten (helloliv = oliv). ✎



Beweis an Tafel aus (1) nur Pythagoras (dreimal, für jedes der drei (ähnlichen) Dreiecke) und (2) einem der Kathetensätze + Pythagoras erklärt; beide Beweise verwenden $c = p+q$). Ein geometrisch anschaulicher Beweis wird in Aufgabe A17 erklärt.

Merke 9.3.6 Fläche auf zwei Arten berechnen

Der folgende einfache Zusammenhang ist nützlich, wird aber leider oft übersehen. ✎

Beweis: Die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks kann von jeder der drei Seiten aus mit der Formel «$\frac{1}{2}$Grundseite mal Höhe» berechnet werden. Was ist die Höhe über einer Kathete? Der Rest des Beweises ist dem Leser als einfache Aufgabe überlassen.

9.4 Quadratwurzeln (Wiederholung)

Definition 9.4.1

Die **Quadratwurzel** $\sqrt{r}$ einer nicht-negativen reellen Zahl $r \geq 0$ ist wie folgt definiert:

$\sqrt{r}$:= die **nicht-negative** reelle Zahl, deren Quadrat r ist

Aufgabe A3 Berechnen Sie:

a) $\sqrt{144}$

b) $\sqrt{\frac{9}{4}}$

c) $\sqrt{1}$

d) $\sqrt{0}$

e) $\sqrt{-1}$

f) $\sqrt{3^{2024} \cdot 7^4}$

g) $\sqrt{\frac{3^{2024}}{7^4}}$

h) $\sqrt{2^{42} \cdot 3^{-2024} \cdot 7^4}$

i) $\sqrt{(-2024)^2}$

j) $\sqrt{x^2}$ für beliebiges x

k) $\sqrt{x^2}$ für beliebiges $x \geq 0$

l) $\sqrt{x^2}$ für beliebiges $x < 0$

Satz 9.4.2 Wurzelgesetze

Für alle nicht-negativen reellen Zahlen a,b gelten ✎ in der Formel rechts ist zusätzlich $b \neq 0$ angenommen

Beweis. Die Zahl rechts des Gleichheitszeichens ist jeweils nicht-negativ und hat die Eigenschaft, dass ihr Quadrat die Zahl links unter dem Wurzelzeichen ist. □

Aufgabe A4 In der Geometrie haben wir es meist mit positiven Grössen zu tun, etwa mit Längen von Strecken. Deswegen nehmen wir in dieser Aufgabe an, dass die Variable a eine beliebige positive reelle Zahl ist. Berechnen bzw. vereinfachen Sie:

a) $\sqrt{3^{2025}}$

b) $\sqrt{3^{2025} \cdot 7^5}$

c) $\sqrt{a^2}$

d) $\sqrt{2a^2}$

e) $\sqrt{3a^2}$

f) $\sqrt{4a^2}$

g) $\sqrt{\frac{a^2}{2}}$ (ohne Wurzel im Nenner angeben!)

h) $\sqrt{\frac{3a^2}{4}}$ (ohne Wurzel im Nenner angeben!)

9.5 Aufgaben (vor allem zum Satz des Pythagoras)

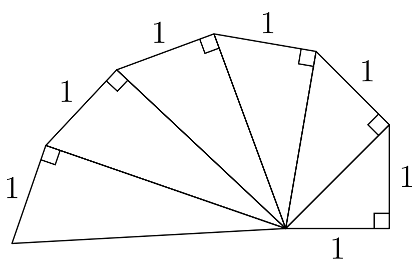
Aufgabe A5 Wurzelkonstruktionen mit Pythagoras:

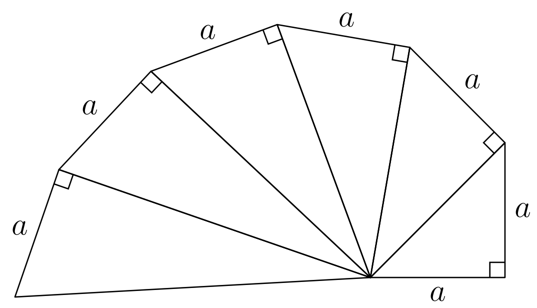
(a) Konstruiere auf Kästchenpapier eine Strecke der Länge $\sqrt{13}$ (Längenangaben in Zentimeter).

(b) Konstruiere auf Kästchenpapier eine Strecke der Länge $\sqrt{22}$.

(c) Konstruiere auf Kästchenpapier eine Strecke der Länge $\sqrt{32}$.

(d) Wurzelschnecke/Wurzelspirale/Spirale des Theodorus: Bestimme alle nicht angegebenen Längen in den beiden folgenden Zeichnungen!





Aufgabe A6 Für ein beliebiges **gleichseitiges** Dreieck (bitte Skizze anfertigen):

(a) Bestimmen Sie die Höhe h und die Fläche des Dreiecks, wenn die Seitenlänge a gegeben ist. Wer mag, kann zuerst den konkreten Fall $a = 1$ oder $a = 17$ behandeln.

(b) Bestimmen Sie das Verhältnis $h : a = \frac{h}{a}$ von Höhe zu Seitenlänge.

(c) Bestimmen Sie die Seitenlänge a in Abhängigkeit von der Höhe h.

Aufgabe A7 Betrachten Sie ein beliebiges **gleichschenkliges rechtwinkliges** Dreieck mit Hypotenuse c und Katheten $a = b$ (bitte Skizze anfertigen).

(a) Welche Winkel hat das Dreieck?

(b) Berechnen Sie c und die Fläche F des Dreiecks in Abhängigkeit von a.

(c) Berechnen Sie a und die Fläche F des Dreiecks, wenn c gegeben ist.

(d) Was ist das Verhältnis Kathete zu Hypotenuse?

Aufgabe A8 Für ein beliebiges 90°-60°-30°-Dreieck bezeichne a die Hypotenuse, x die längere und y die kürzere Kathete (bitte Skizze anfertigen).

(a) Berechnen Sie aus jeder der drei Längen a, x, y die beiden anderen.

(b) Geben Sie die Verhältnisse $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{a}$ und $\frac{y}{x}$ an.

(c) Mit Hilfe von Kathetensatz und Höhensatz (letzterer wurde vermutlich noch nicht bewiesen; er lautet $h^2 = pq$):

Bestimmen Sie die beiden Hypotenusenabschnitte (der längere sei p, der kürzere q) und die Höhe h in Abhängigkeit von der Hypotenuse a.

Merke 9.5.1

Für die folgenden Typen von Dreiecken kann man mit Pythagoras aus jeder der drei Seiten jede andere Seite (und Höhe und Flächeninhalt) berechnen:

- gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck, d. h. 90°-45°-45°-Dreieck
- 90°-60°-30°-Dreieck

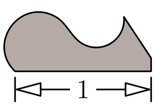
Beweis. Siehe Aufgaben A7 und A8. □

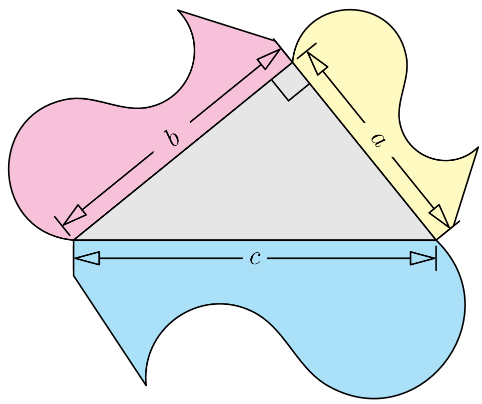
Aufgabe A9 **Pythagoras für beliebige zueinander ähnliche Figuren über den Dreiecksseiten**

In der Zeichnung rechts sind die drei farbigen Figuren ähnlich zueinander.
Zeigen Sie: Für die Flächeninhalte gilt

$$\text{Gelb} + \text{Rosa} = \text{Hellblau}$$

Hinweis: Bezeichne F die Fläche der (zu den drei farbigen Gebieten ähnlichen) dunkelgrauen Figur mit Grundseite der Länge 1. Wie kann man die Flächen der drei farbigen Figuren durch F ausdrücken?

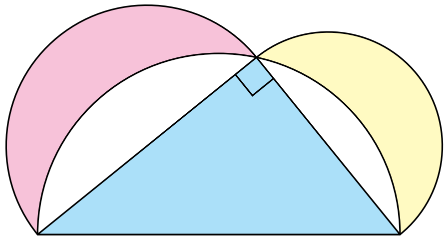




Bemerkung: Die analoge Aussage gilt für beliebige zueinander ähnliche Figuren über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks.

Aufgabe A10 Möndchen des Hippokrates

Die beiden mondsichelförmigenförmigen Figuren in Rosa und Gelb in der Zeichnung rechts werden die «Möndchen des Hippokrates» genannt.
Zeigen Sie, dass die Fläche der beiden Möndchen mit der Fläche des rechtwinkligen Dreiecks übereinstimmt.



Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe A9 für Halbkreise über den Dreiecksseiten.

Bemerkung: Die Möndchen des Hippokrates sind die ersten *krummlinig* begrenzten Flächenstücke, deren Inhalt exakt berechnet werden konnte (laut Wikipedia: Lune of Hippocrates).

Abstand zwischen zwei Punkten der kartesischen Zeichenebene

Aufgabe A11 Betrachten Sie die Punkte «Ursprung» $U = (0, 0)$ und $P = (2, 5)$ der Zeichenebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(a) Markieren Sie die beiden Punkte in einem Koordinatensystem und bestimmen Sie den Abstand $\overline{UP}$ mit dem Satz von Pythagoras. Prüfen Sie Ihr Ergebnis durch Abmessen!

(b) Zeichnen Sie zusätzlich den Punkt $Q = (5, 1)$ ein und bestimmen Sie den Abstand $\overline{PQ}$.

Hinweis: Finden Sie ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die Strecke $[PQ]$ ist und dessen Katheten Sie aus den Koordinaten von P und Q ausrechnen können.

(c) Was ist wohl in Merke 9.5.2 zu ergänzen?

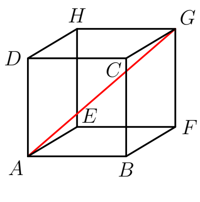
Merke 9.5.2

Sind $P = (x_P, y_P)$ und $Q = (x_Q, y_Q)$ zwei beliebige Punkte der Zeichenebene $\mathbb{R}^2$, so gilt

$$\text{Abstand}(P, Q) = \overline{PQ} = ✎$$

Berechnungen im dreidimensionalen Raum

Aufgabe A12 Stellen Sie sich vor, dass eine Fliege und ein (nicht fliegen könnender) Marienkäfer in der Ecke A eines würfelförmigen Raums der Seitenlänge 1 sitzen.

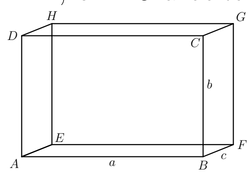


(a) Welche Flugstrecke legt die Fliege zurück, wenn sie direkt zur gegenüberliegenden Ecke G fliegt? Mit anderen Worte: Wie lang ist die rot eingezeichnete Raumdiagonale $[AG]$?

(b) Wie lang ist der kürzeste Weg für den Marienkäfer zur gegenüberliegenden Ecke G? Er kann leider nur auf den Wänden des Raums laufen.

Hinweis: Denken Sie an Würfelnetze (= «Bastel-/Faltvorlagen für Würfel»), d. h. falten Sie den Würfel auf.

Nun stelle man sich vor, dass der Raum quaderförmig ist mit Seitenlängen a, b und c (wie in der Zeichnung markiert). Wenn Sie wollen, können Sie auch zuerst mit konkreten Zahlen $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$ arbeiten.



(c) Wie lang ist die Raumdiagonale $[AG]$ im Quader?

(d) Wie lang ist der kürzeste Weg von A nach G über einen geeigneten Punkt der Kante $[BC]$?

(e) Wie lang ist der kürzeste Weg entlang der Wände von A nach G, wenn $a \geq b \geq c$ gilt? Über welche Kante führt der kürzeste Weg?

Hinweis: Es gibt drei naheliegende Kandidaten für den kürzesten Weg. Welcher davon ist der kürzeste?

Aufgabe A13 Das (oder der) **Tetraeder** ist einer der fünf platonischen Körper (altgriechisch τετρα- tetra- «vier» und ἕδρα hédra «Sitz», «Sessel», «Gesäß» bzw. übertragen «Seitenfläche»).

Er besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken derselben, beliebig gewählten Seitenlänge s. Bestimme die folgenden Werte (nur die letzten beiden hängen von s ab):

(a) Wie viele Flächen, Kanten und Ecken hat er?

(b) Was ist die Höhe (= Körperhöhe) des Tetraeders in Abhängigkeit von s?

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die Höhe einer Seite des Tetraeders (dabei hilft eine vorherige Aufgabe). Liegt das Tetraeder auf einer Seitenfläche, so ist der Fusspunkt der Körperhöhe der Schwerpunkt der Grundfläche. Denken Sie daran, dass sich die Seitenhalbierenden eines Dreiecks in einem gewissen Verhältnis teilen.

Abstand zwischen zwei Punkten des dreidimensionalen kartesischen Raums

Aufgabe A14 Betrachten Sie die Punkte $U = (0, 0, 0)$ und $P = (3, 4, 12)$ des dreidimensionalen Raums $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie den Abstand $\overline{UP}$.

(b) Betrachten Sie zusätzlich den Punkt $Q = (1, 7, 8)$ und bestimmen Sie den Abstand $\overline{PQ}$.

(c) Was ist wohl in Merke 9.5.3 zu ergänzen?

Merke 9.5.3

Sind $P = (x_P, y_P, z_P)$ und $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ zwei beliebige Punkte des Raums $\mathbb{R}^3$, so gilt

$$\text{Abstand}(P, Q) = \overline{PQ} = ✎$$

Umkehrung des Satzes des Pythagoras

Beweis der Umkehrung an Tafel erklären. Resultat in Satz 9.3.3 ergänzen.

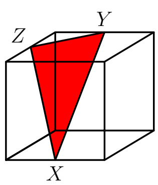
9.5.4. Beim Anlegen von rechteckigen Feldern ist es nützlich, relativ schnell rechte Winkel bestimmen zu können. In der Antike wurde dazu eine «kreisförmige» Schnur, die in zwölf gleich grosse Teile eingeteilt war, verwendet. Wie ging man vor?

Aufgabe A15 Welche der vier Dreiecke mit den folgenden Seitenlängen sind rechtwinklig?

a) $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ b) $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$ c) $a = 17$, $b = 15$, $c = 8$ d) $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$

Aufgabe A16

Im rechts abgebildeten Würfel der Seitenlänge a liegen die Punkte X, Y und Z jeweils auf den Kantenmitten. Ist das Dreieck $\triangle XYZ$ rechtwinklig?

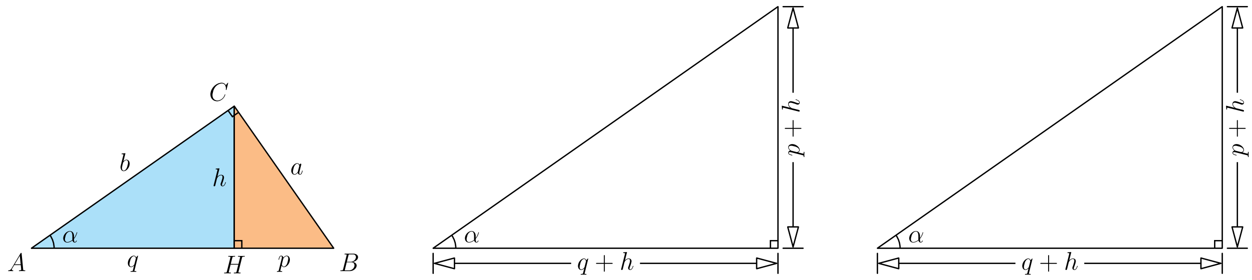


Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Höhensatz

Aufgabe A17 Beweis des Höhensatzes durch Ergänzung

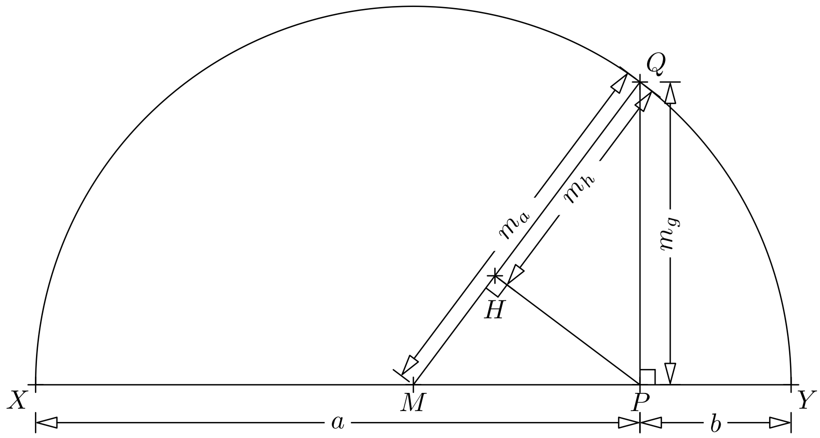
Links ist ein rechtwinkliges Dreieck dargestellt, das von seiner Höhe in zwei Dreiecke (blau und braun) zerlegt wird. Legen Sie diese beiden Dreiecke auf zwei verschiedene Weisen «in die Ecken» des zweimal dargestellten Dreiecks (also einmal beide Teile in das mittlere Dreieck, einmal beide Teile in das rechte Dreieck). Folgern Sie daraus den Höhensatz $\boxed{h^2 = p \cdot q}$.



Drei Mittelwerte anschaulich

Aufgabe A18 **Drei Mittelwerte: Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel**

Ausgehend von zwei Längen a und b wurde die Figur rechts wie folgt konstruiert: Trage a und b nebeneinander von einem Punkt P aus in entgegengesetzte Richtungen ab und errichte über der Strecke $a + b$ einen Thales(halb)kreis mit Mittelpunkt M. Zeichne senkrecht zur Grundseite des Thaleskreises in P eine Gerade ein. Sei Q ihr Schnittpunkt mit dem Thaleskreis. Zeichne den Radius $[MQ]$ ein. Schliesslich ist H der Fusspunkt des Lots von P auf $[MQ]$.
Bestimme in Abhängigkeit von a und b die folgenden Längen:



(a) das **arithmetische Mittel** $m_\mathrm{a} = \overline{MQ}$ von a und b;

(b) das **geometrische Mittel** $m_\mathrm{g} = \overline{PQ}$ von a und b; Hinweis: Höhensatz

(c) das **harmonische Mittel** $m_\mathrm{h} = \overline{HQ}$ von a und b. Hinweis: Kathetensatz

Merke 9.5.5 Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel (= Mittelwert)

Wenn $a, b \in \mathbb{R}^+$ positive reelle Zahlen sind, so nennt man

- $\frac{a+b}{2}$ das **arithmetische Mittel** von a und b;
- $\sqrt{ab}$ das **geometrische Mittel** von a und b;
- $\frac{2ab}{a+b}$ das **harmonische Mittel** von a und b.

Es gilt «harmonisches $\leq$ geometrisches $\leq$ arithmetisches Mittel», d. h. Beweis: Klar aus der Zeichnung in Aufgabe A18.

$$m_\mathrm{h} \leq m_\mathrm{g} \leq m_\mathrm{a}$$

Merkhilfe: Das harmonische Mittel ist der Kehrwert des arithmetischen Mittels der Kehrwerte von a und b, denn es gilt $\frac{2ab}{a+b} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}$ (warum?).

9.6 Auftrag für Montag, 23. März: Aufgabe A19

Aufgabe A19 Die folgenden Aufgaben sind grösstenteils aus der Aufgabensammlung von Angelika Rupflin, Kantonsschule am Burggraben St. Gallen

Die Aufgaben (a) bis (k) sind mit dem Satz des Pythagoras lösbar. Kathetensatz (und der noch nicht bewiesene Höhensatz) werden nicht benötigt.

(a) Gegeben sind zwei Quadrate mit den Seitenlängen 3 cm und 5 cm. Konstruieren Sie ein Quadrat dessen Flächeninhalt a) mit der Summe b) mit der Differenz der Inhalte der beiden Quadrate übereinstimmt.

(b) Zeichnen Sie ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 3$ cm und konstruieren Sie dann ein Quadrat, das a) den halben, b) den doppelten, c) den dreifachen Inhalt des ursprünglichen Quadrats hat.

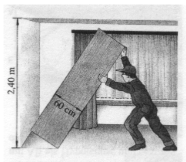
(c) Konstruieren Sie (ausgehend von ganzzahligen Streckenlängen) auf mindestens 2 verschiedene Weisen ein Quadrat mit dem Flächeninhalt
a) 5 cm^2 b) 27 cm^2

(d) Welchen Radius muss ein rundes Backblech mindestens haben, damit eine rechteckige Tiefkühlpizza mit den Abmessungen 22 cm $\times$ 17 cm darauf Platz hat.

(e) Berechnen Sie die theoretische Blickweite von einem 100 m hohen Leuchtturm aufs Meer. (Erdradius $6.37 \cdot 10^6$ m)

(f) Wie weit unter Wasser liegt die gerade Verbindungslinie von Romanshorn nach Friedrichshafen? Machen Sie eine Skizze. Erdradius: 6370 km. Die Entfernung Romanshorn-Friedrichshafen bitte selbst herausfinden (und als Länge der geraden Verbindungsstrecke interpretieren).

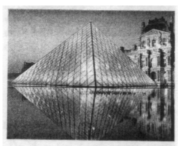
(g) Wie hoch darf ein 60 cm tiefer (und sehr breiter) Schrank höchstens sein, damit man ihn aus der liegenden Position in einem 2.4 m hohen Raum durch Kippen aufstellen kann?
Hinweis: Bitte nicht von der Wand im Bild irritieren lassen sondern den Schrank in der Raummitte aufrichten.



(h) Berechnen Sie die Länge aller Seitenhalbierenden in einem rechtwinkligen Dreieck aus den Kathetenlängen a und b. a) $a = 6$ und $b = 10$ b) allgemein mit Parametern a und b

(i) Von einem allgemeinen Dreieck ABC kennt man die Seite $c = 56$ cm, die Höhe $h_c = 15$ cm und die Seitenhalbierende $s_c = 17$ cm. Berechnen Sie die Länge der Seiten a und b.

(j) Die abgebildete Pyramide über dem Eingang des Louvre in Paris ist 21.6 m hoch. Ihre Grundfläche ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 34.2 m. Wie gross ist die Glasfläche?



(k) Gegeben sei eine Strecke der Länge a.
Konstruieren Sie a) $\sqrt{61}\,a$ b) $\sqrt{153}\,a$ c) $\sqrt{7}\,a$

In den beiden folgenden Teilaufgaben ist die Umkehrung des Satzes von Pythagoras zu verwenden: Gilt für drei Seiten x, y, z eines Dreiecks $x^2 = y^2 + z^2$, so ist das Dreieck rechtwinklig mit rechtem Winkel gegenüber der (längsten) Seite z.

(l) Gegeben sind die Punkte $A = (-3, -2)$, $B = (6, 1)$ und $C = (-5, 4)$. Prüfen Sie durch Rechnung, ob das Dreieck ABC rechtwinklig ist. Wenn ja: Bei welchem Punkt liegt der rechte Winkel? (Keine genaue Zeichnung verlangt, aber eine Skizze ist sicherlich hilfreich!)

(m) Überprüfen Sie durch Rechnung, ob das Dreieck ABC mit $A = (2, 1)$, $B = (1, 10)$ und $C = (6, 5)$ rechtwinklig ist (und wenn ja, wo der rechte Winkel liegt) und geben Sie den Flächeninhalt an! (Grobe Skizze empfohlen!)

(n) Verwandeln Sie ein Dreieck mit den Seitenlängen 6 cm, 7 cm, 8cm per Konstruktion mit Zirkel und Lineal in ein flächengleiches Quadrat.

Hinweis: Finden Sie zuerst ein Rechteck mit demselben Flächeninhalt. Mit dem Kathetensatz oder Höhensatz $h^2 = pq$ («Höhe quadriert = Produkt der Hypotenusenabschnitte») können Sie dieses Rechteck dann in ein Quadrat verwandeln. Überlegen Sie sich am besten beiden Lösungen, sowohl mit Kathetensatz als auch mit Höhensatz.

(o) Verwandeln Sie ein Quadrat mit Seitenlänge 7.5 cm per Konstruktion mit Zirkel und Lineal in ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite 5.5 cm lang ist. Erläutern Sie kurz Ihr Vorgehen!

(p) Ein Matrose sitzt auf hoher (und ruhiger) See im Ausguck eines Schiffes 25 m über dem Wasser. In welcher Entfernung (Luftlinie) sieht er frühestens

(i) eine auf dem Wasser treibende Luftmatratze?

(ii) einen anderen Matrosen, der seinerseits in einem Ausguck 30 m über der Wasseroberfläche sitzt?

Hinweis: Fertigen Sie eine Skizze an. Erdradius: 6370 km

9.7 Weitere Aufgaben

Aufgabe A20

Berechnen Sie in der folgenden Tabelle die fehlenden Grössen, wobei a, b, c, p, q, h jeweils die üblichen Strecken eines rechtwinkligen Dreiecks bezeichnen; F bezeichnet seine Fläche. (Taschenrechner erlaubt)

a	b	c	p	q	h	F
3			$\frac{9}{5} = 1.8$			
13					12	
		25		16		
			1	7		

Aufgabe A21 In einem rechtwinkligen Dreieck teilt die Höhe h auf die Seite c diese in zwei Hypotenusenabschnitte, p und q, wobei p näher bei a liegt. Von den sechs Strecken a, b, c, h, p und q sind jeweils zwei gegeben. Finden Sie Formeln, um daraus die anderen vier zu berechnen.

a) a, b b) a, p c) p, q d) p, c e) p, b

Aufgabe A22 Es folgt eine Liste von Wortverbindungen. Diese sind in den nachfolgenden Lückentext so einzutragen, dass korrekte Aussagen entstehen:

Wortverbindungen: der Höhe | Hypotenusenabschnitt | der beiden Hypotenusenabschnitte | der Hypotenuse | von Hypotenuse | der Katheten | der zugehörigen Kathete | das Produkt | das Produkt | das Quadrat | das Quadrat | das Quadrat | der Quadrate | rechtwinkligen | die Summe

Lückentext: In jedem ______ Dreieck gilt

- laut dem Satz von Pythagoras: ______ ______ ______
  ist so gross wie ______ ______
- laut dem Kathetensatz: ______ ______ und ______
  ist so gross wie ______ ______
- laut dem Höhensatz: ______ ______
  ist so gross wie ______ ______

Aufgabe A23 Besonders «natürlich(zahlig)es» rechtwinkliges Dreieck

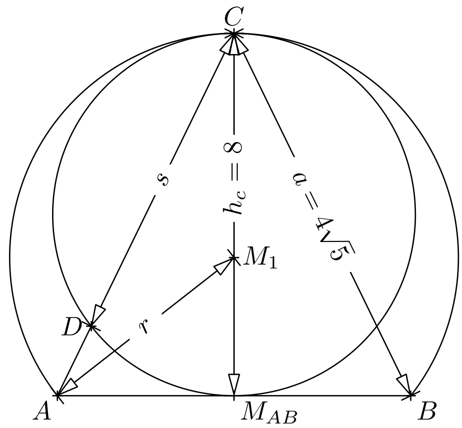
Vermutlich kennen Sie das rechtwinklige Dreieck mit **positiven ganzzahligen** Seitenlängen $a = 3$, $b = 4$ und $c = 5$. Es illustriert den Satz des Pythagoras auf besonders schöne Weise: $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

Gibt es ein rechwinkliges Dreieck mit $a, b, c, p, q, h \in \mathbb{N}^+$?

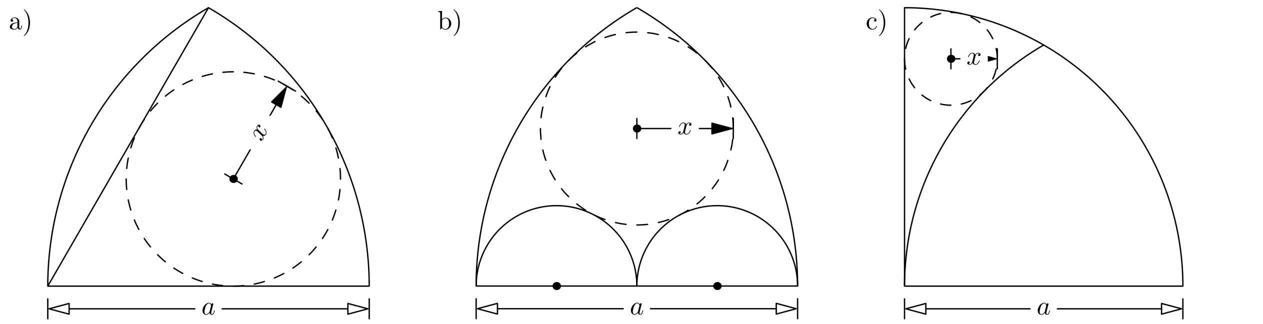
Hinweis: Berechnen Sie im 3-4-5-Dreieck p, q und h. Strecken Sie das Dreieck dann so, dass alle Strecken a, b, c, p, q, h ganzzahlig werden.

Aufgabe A24

Berechnen Sie s und r aus $a = 4\sqrt{5}$ und $h_c = 8$.



Aufgabe A25 Berechnen Sie aus a den Radius x der skizzierten Füllkreise.



Hinweis zu a): Suchen Sie ein 90°-60°-30°-Dreieck.

Hinweise zu b) und c): Berechnen Sie den Abstand vom Kreiszentrum zur Grundlinie auf zwei Arten.

Aufgabe A26 Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit dem Höhensatz!

(a) Geometrisches Wurzelziehen: Gegeben sind zwei Strecken der Länge a und 1. Konstruieren Sie eine Strecke der Länge $\sqrt{a}$.

(b) Rechteck in flächengleiches Quadrat verwandeln: Gegeben ist ein Rechteck mit Seitenlängen x und y. Konstruieren Sie ein Quadrat desselben Flächeninhalts.

(c) Quadrat in flächengleiches Rechteck mit gegebener Seitenlänge verwandeln: Gegeben ist ein Quadrat mit Seitenlänge s und eine Strecke x. Konstruieren Sie ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite x ist.

(d) Anwendung der vorigen beiden Teilaufgabe: Gegeben sind zwei Strecken der Längen x und y und eine Strecke der Länge 1 als «Masseinheit». Konstruieren Sie eine Strecke der Länge xy.

Bemerkung: Einfacher geht das mit dem Strahlensatz, wie im Skript «Zahlen» erklärt.

Aufgabe A27 Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit dem Kathetensatz!

(a) Rechteck in flächengleiches Quadrat verwandeln: Gegeben ist ein Rechteck mit Seitenlängen x und y. Konstruieren Sie ein Quadrat desselben Flächeninhalts.

(b) Quadrat in flächengleiches Rechteck mit gegebener Seitenlänge verwandeln: Gegeben ist ein Quadrat mit Seitenlänge s und eine Strecke x. Konstruieren Sie ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite x ist.

9.8 Heronformel

9.8.1. Mit der Heronformel kann man die Fläche eines **beliebigen** Dreiecks rasch aus seinen Seitenlängen berechnen.

Betont sei, dass die Heronformel für alle Dreiecke gilt (für rechtwinklige Dreiecke gilt sie zwar auch, ist aber relativ uninteressant, denn die Fläche eins rechtwinkligen Dreieck ist die Hälfte des Produkts der Katheten).

Satz 9.8.2 Heronsche Formel, Satz des Heron

Der Flächeninhalt A eines beliebigen Dreiecks mit Seitenlängen a, b und c ist

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

wobei $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ der halbe Umfang ist.

Aufgabe A28

(a) Berechne mit der Heronschen Flächenformel den Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Seitenlängen $a = 3$, $b = 7$, $c = 8$. Lösung: $6\sqrt{3}$

Berechne aus dem Flächeninhalt alle Höhen des Dreiecks.
Lösungen: $h_a = 4\sqrt{3}$, $h_b = \frac{12}{7}\sqrt{3}$, $h_c = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

(b) Berechne die Fläche des (rechtwinkligen) 3-4-5-Dreiecks auf zwei Weisen:

- direkt (sehr einfach);
- mit Heron.

(c) Zeige, dass die Heronformel für jedes gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge a gilt, indem du die Fläche einmal klassisch ausrechnest und einmal mit Heron. Lösung: Beide Male $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

(d) Zeige genauso, dass die Heronformel für jedes rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck gilt.
Lösung: Beide Male $\frac{1}{2}a^2$

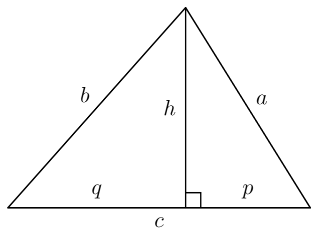
9.8.3. Wenn man eine neue Formel kennenlernt, ist es immer eine gute Idee, sich zu überlegen, ob die Formel plausibel ist. Bei der Heronschen Formel bieten sich die folgenden Tests an:

- Dimensionskontrolle (genaueres im Abschnitt 9.9): Die sogenannte **Dimension** der Grösse unter dem Wurzelzeichen ist «Länge hoch 4» (also beim Messen in Metern m^4), die Wurzel davon hat die Dimension «Länge hoch 2» (also m^2). Dies ist die richtige Dimension für eine Fläche.
- Verhalten bei (zentrischen) Streckungen: Wenn man das Dreieck mit einem Faktor λ streckt, so werden a, b und c jeweils mit dem Faktor λ multipliziert. Dasselbe gilt auch für s, $s-a$, $s-b$ und $s-c$. Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen wird also mit λ^4 multipliziert, der Ausdruck rechts des Gleichheitszeichens mit dem Faktor λ^2. Dies ist der richtige Änderungsfaktor für eine Fläche bei einer Streckung mit Faktor λ.
- Permutationsverhalten: Der Wert der rechten Seite ändert sich nicht, wenn man (die Werte von) a, b und c miteinander vertauscht/permutiert. Das sollte auch so sein, denn wie man die Seiten eines Dreiecks benennt, ist Geschmackssache.
- Direkte Tests (wie in Aufgabe A28): Stimmt die Formel für spezielle («leicht zu berechnende») Dreiecke?
  - gleichseitiges Dreieck
  - gewisse rechtwinklige Dreiecke, etwa 3-4-5-Dreieck
  - rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke
  - eventuell: «entartete» Dreiecke (etwa $a + b = c$, d. h. das Dreieck liegt auf einer Geraden)

Aufgabe A29 Lies den folgenden Beweis der Heronformel genau durch. Überlege dir bei jedem Schritt, warum er gilt. Insbesondere solltest du jede Gleichung und jede Umformung verstehen. Wo wird Pythagoras angewendet. Wo werden binomische Formeln angewendet? Verstehst du alle Umformungen von Brüchen? Stimmen die Plus- und Minuszeichen beim Auflösen von Klammern?

Zusatzfrage: Die Zeichnung im Beweis zeigt ein Dreieck, bei dem der Höhenfusspunkt der Höhe $h = h_c$ auf der Seite c liegt. Wie muss man den Beweis anpassen, damit er weiterhin stimmt, wenn sich der Höhenfusspunkt nicht auf c, sondern auf der Verlängerung von c befindet? Wenn sich also der Eckpunkt C zum Beispiel «sehr weit rechts» befindet?

Beweis der Heronformel. Die Skizze zeigt ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c. Zusätzlich ist die Höhe $h = h_c$ eingezeichnet. Sie teilt die Seite c in die beiden Abschnitte x und y.



Pythagoras, angewendet auf die beiden offensichtlichen rechtwinkligen Dreiecke, liefert die ersten beiden der folgenden Gleichheiten

$$b^2 - y^2 = h^2 = a^2 - x^2 = a^2 - (c-y)^2 = a^2 - c^2 + 2cy - y^2$$

Addiert man zu der «äusseren» Gleichheit auf beiden Seiten y^2, so folgt

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2cy$$

Löst man dies nach y auf, so folgt

$$y = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}$$

Damit und mit dem oben bereits verwendeten $h^2 = b^2 - y^2 = (b+y)(b-y)$ folgt aus der üblichen Flächenformel $A = \frac{1}{2}ch$

$$\begin{aligned}
A^2 &= \left(\frac{ch}{2}\right)^2 \\
&= \frac{c^2}{4} \cdot h^2 \\
&= \frac{c^2}{4} \cdot (b+y)(b-y) \\
&= \frac{c^2}{4} \cdot \left(b + \frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}\right)\left(b - \frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}\right) \\
&= \frac{c^2}{4} \cdot \frac{2bc - a^2 + b^2 + c^2}{2c} \cdot \frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{2c} \\
&= \frac{1}{16} \cdot (-a^2 + (b+c)^2) \cdot (a^2 - (b-c)^2) \\
&= \frac{1}{16} \cdot ((b+c)+a) \cdot ((b+c)-a) \cdot (a+b-c) \cdot (a-(b-c)) \\
&= \frac{1}{16} \cdot (a+b+c) \cdot (-a+b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (a-b+c)) \\
&= \frac{1}{16} \cdot 2s \cdot (2s-2a) \cdot (2s-2c) \cdot (2s-2b) \\
&= s \cdot (s-a) \cdot (s-c) \cdot (s-b)
\end{aligned}$$

Wurzelziehen auf beiden Seiten zeigt nun die behauptete Formel. □

9.9 Nachtrag: Dimension einer physikalischen Grösse und Dimensionskontrolle

Dieser Abschnitt folgt eng dem Anhang ... im Buch Geometrie für Maturitätsschulen von ...

9.9.1. Die **Dimension** einer physikalischen Grösse drückt deren qualitative Eigenschaften aus.
(Dieser Begriff der Dimension hat nichts zu tun mit dem Dimensionsbegriff in Formulierungen wie «der dreidimensionale Raum». Der dortige Dimensionsbegriff für «Räume» misst grob gesagt die Anzahl der Parameter, die man benötigt, um einen Punkt zu beschreiben.)

Beispiele 9.9.2.

- Die physikalischen Grössen 7 m, 2 km, 3 Meilen haben die Dimension **Länge**.
- Die physikalischen Grössen 17 g, 5 kg, 7.3 t haben die Dimension **Masse**.
- Die physikalischen Grössen 3 m/s, 7 km/h, 2 m/h haben die Dimension $\frac{\textbf{Länge}}{\textbf{Zeit}}$.

9.9.3. Die «Basisdimensionen» sind Länge, Zeit, Masse, elektrische Stromstärke, Temperatur, Stoffmenge und Lichtstärke (für jede dieser Basisdimensionen gibt es eine SI-Basiseinheit: Meter, Sekunde, Kilogramm, Ampere, Kelvin, Mol, Candela).

Die Dimension jeder physikalischen Grösse lässt sich durch diese Basisdimensionen ausdrücken (als Produkt von Potenzen). Beispielsweise gelten

$$\text{Dimension jeder Geschwindigkeit} = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} = \text{Länge} \cdot \text{Zeit}^{-1}$$
$$\text{Dimension jedes Volumens} = \text{Länge}^3$$

Merke 9.9.4

Physikalische Grössen können nur dann addiert werden, wenn sie dieselbe Dimension haben.

Beispiele 9.9.5.

- 2 km − 80 mm ist definiert.
- $7\,\text{m}^3 + 5$ ist nicht definiert.
- 3 cm + 5 kg ist nicht definiert.

9.9.6. Man beachte den Unterschied zwischen den Begriffen «Dimension» und «Einheit»: Für eine gegebene Dimension gibt es meist viele Einheiten, in denen man sie messen kann.

Eine Grösse der Dimension Länge^2, also eine Fläche (oder genauer ein Flächeninhalt), kann beispielseise in m^2, aber auch in km^2 oder in Hektar gemessen werden.

Eine Grösse der Dimension Länge^3, also ein Volumen, kann beispielseise in m^3 und in Liter gemessen werden.

9.9.7. Mit Hilfe einer Dimensionskontrolle kann man bisweilen sehr schnell feststellen, dass eine Gleichung nicht stimmen kann. Wie das geht, erklärt die folgende Aufgabe.

Aufgabe A30 (sinngemäss aus «Geometrie für Maturitätsschulen»)
Im Folgenden stehen

- a, b, x für Strecken;
- A für einen Flächeninhalt;
- V für ein Volumen.

Dimensionskontrolle: Prüfe, ob die folgenden Gleichheiten gelten können, indem du die Dimensionen beider Seiten ermittelst und vergleichst.

a) $x = (\pi - \sqrt{2})a$
b) $b = 2a - \sqrt{3}$
c) $x = \frac{a^2}{2b} + \sqrt{3ab}$
d) $\pi(a+7)a$
e) $A = \frac{2V}{a-b} + \frac{a}{2}\sqrt{b}$
f) $V = \frac{2}{3}a(a^2 + \sqrt{3}A - 2b)$

Aufgabe A31 (sinngemäss aus «Geometrie für Maturitätsschulen») Bedeutung der Grössen a, b, x, A, V wie in der vorherigen Aufgabe A30.

Bestimme jeweils die Dimension der Grösse G.

a) $a = \frac{G}{\sqrt{2A}}$
b) $A = \frac{\pi a}{G}(a+b)$
c) $V = \sqrt{3(a^4 - b^4)G}$

9.10 Pythagoreische Tripel

9.10.1. Besonders «schöne» rechtwinklige Dreiecke sind solche, bei denen alle Seitenlängen positive natürliche Zahlen sind (in einer beliebigen fixierten Längeneinheit gemessen, etwa Zentimeter).

Definition 9.10.2 Pythagoreische Tripel

Ein **pythagoreisches Tripel** ist ein Tripel (a, b, c) $\boxed{\text{positiver natürlicher}}$ Zahlen mit

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Beispiele 9.10.3.

- Das bekannteste pythagoreische Tripel ist $(3, 4, 5)$, denn $3^2+4^2 = 5^2$. Andere Beispiele sind $(5, 12, 13)$ oder $(8, 15, 17)$.
- Vertauscht man die beiden ersten Einträge eines pythagoreischen Tripels, so erhält man ein (anderes) pythagoreisches Tripel: Beispielsweise ist mit $(3, 4, 5)$ auch $(4, 3, 5)$ ein pythagoreisches Tripel.
- Jedes «Vielfache» eines pythagoreischen Tripels ist ein pythagoreisches Tripel: Mit $(3, 4, 5)$ sind auch $(6, 8, 10)$ und $(9, 12, 15)$ und $(12, 16, 20)$ etc. pythagoreische Tripel.

  Deswegen sind die besonders interessanten pythagoreischen Tripel diejenigen mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ (und dann automatisch $\mathrm{ggT}(a, b, c) = 1$). Man nennt solche pythagoreischen Tripel **primitiv**. Jedes pythagoreische Tripel kann man in ein primitives verwandeln, indem man seine drei Einträge durch $\mathrm{ggT}(a, b, c)$ dividiert.

Aufgabe A32

(a) Testen Sie den rechts angegebenen Algorithmus für einige Wahlen von a.

(b) Zeigen Sie allgemein, dass dieser Algorithmus pythagoreische Tripel liefert (u. a. ist zu zeigen, dass b eine positive natürliche Zahl ist).
Zusätzlich können Sie sich überlegen: Man erhält auf diese Weise alle pythagoreischen Tripel (a, b, c) mit $c = b + 1$.

Algorithmus 9.10.4

(1) Wähle eine beliebige ungerade Zahl $a \geq 3$.
(2) Setze $b := \frac{a^2-1}{2}$.
(3) Ausgabe: $(a, b, b + 1)$ ist ein pythagoreisches Tripel

Satz 9.10.5 Euklids Formel zur Erzeugung pythagoreischer Tripel

(a) Euklids Formel: Für alle natürlichen Zahlen m und n mit $m > n > 0$ ist

$$(m^2 - n^2,\ 2mn,\ m^2 + n^2)$$

ein pythagoreisches Tripel. (Beachte, dass die mittlere Zahl hier stets gerade ist.)

(b) Jedes pythagoreische Tripel ist «rational proportional» zu einem der Tripel in «Euklid-Form».

Hierbei bedeutet «rational proportional»: Das eine Tripel entsteht aus dem anderen, indem man seine drei Einträge mit derselben positiven $\boxed{\text{rationalen}}$ Zahl multipliziert. Äquivalent: Beide Tripel haben ein gemeinsames Vielfaches. Ebenfalls äquivalent: Beide Tripel sind Vielfache desselben primitiven pythagoreischen Tripels.

Aufgabe A33

(a) Zeige die erste Behauptung in Satz 9.10.5: Sind $m > n > 0$ natürliche Zahlen, so ist $(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ ein pythagoreisches Tripel.

(b) Rechne für 10 verschiedene (eher kleine) Wahlen von $m > n > 0$ (mit m und n teilerfremd, nicht beide ungerade) das zugehörige pythagoreische Tripel aus.

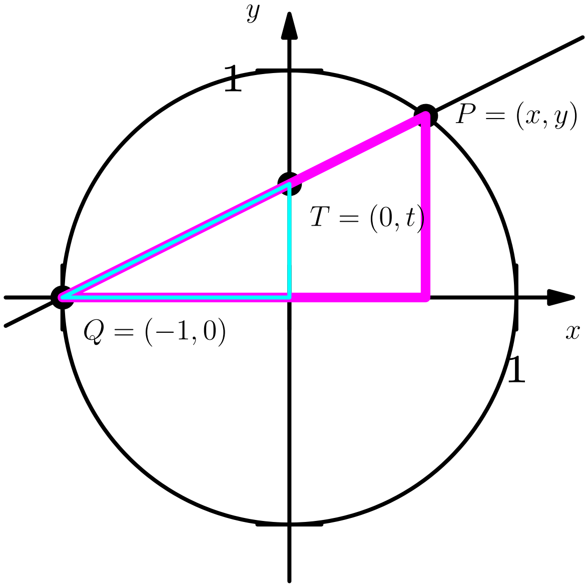
(c) Das pythagoreische Tripel $(4, 3, 5)$ kann nicht mit Euklids Formel erzeugt werden, denn 3 ist ungerade. Finde $m > n > 0$ so, dass das zugehörige pythagoreische Tripel in Euklid-Form $(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ «rational proportional» zu $(4, 3, 5)$ ist.

Beweis von Satz 9.10.5. (a) Dass Euklids Formel pythagoreische Tripel erzeugt, ist eine einfache Rechnung, siehe (die Lösung von) Aufgabe A33.(a).

(b) Dem Beweis liegen wichtige geometrische Ideen zugrunde, die wir schrittweise erklären.

Schritt 1: Vom Einheitskreis zur y-Achse und zurück:

In der Zeichnung ist der Einheitskreis dargestellt (Einheitskreis(= Kreis mit Radius 1 um den Ursprung) und zusätzlich der Punkt $Q = (-1, 0)$ markiert.
Wählt man eine beliebige nicht vertikale Gerade durch Q, so schneidet diese die y-Achse in einem Punkt $T = (0, t)$ und den Einheitskreis (ausser in Q) in einem weiteren Punkt $P = (x, y)$.
Wir erklären nun, wie man aus den Koordinaten x und y von $P = (x, y)$ die y-Koordinate t von $T = (0, t)$ berechnen kann und umgekehrt.



- Sei $P = (x, y)$ gegeben. Wir wollen die y-Koordinate t von T berechnen.

  Da die beiden farbig eingezeichneten Dreiecke zueinander ähnlich sind bzw. nach dem Strahlensatz gilt

$$t = \frac{t}{1} = \frac{y}{x+1}$$

- Sei umgekehrt $T = (t, 0)$ gegeben. Wir wollen die Koordinaten x und y von P berechnen.
  Da $P = (x, y)$ auf dem Einheitskreis liegt, muss gelten

$$1 = \text{Abstand}(P, \text{Ursprung}) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

  oder gleichbedeutend (quadriere die Gleichung)

$$x^2 + y^2 = 1$$

  Ausserdem muss P auf der Geraden durch $Q = (-1, 0)$ und $T = (t, 0)$ liegen. Diese hat offensichtlich die Steigung t und deswegen die Gleichung

$$y = t(x - x_Q) + y_Q = t(x + 1)$$

  Da $P = (x, y)$ sowohl auf dieser Geraden als auch auf dem Einheitskreis liegt, müssen die Koordinaten von P die beiden Gleichungen $y = t(x + 1)$ und $x^2 + y^2 = 1$ gleichzeitig erfüllen.
  Der Punkt $Q = (-1, 0)$ löst diese beiden Gleichungen. Wir suchen nun aber die Lösung $P = (x, y)$ mit $x \neq -1$ bzw. gleichbedeutend mit $x + 1 \neq 0$.
  Wir substituieren $y = t(x + 1)$ in die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ und erhalten

$$\begin{aligned}
x^2 + t^2(x+1)^2 &= 1 \\
x^2 - 1 + t^2(x+1)^2 &= 0 \\
(x+1)(x-1) + t^2(x+1)^2 &= 0 && \text{Division durch } x+1 \neq 0 \\
x - 1 + t^2(x+1) &= 0 \\
x - 1 + t^2 x + t^2 &= 0 \\
x(1+t^2) &= 1 - t^2 \\
x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}
\end{aligned}$$

  und somit (Rücksubstitution)

$$y = t(x+1) = t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1\right) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Zwischenfazit: Unsere Abbildungen zwischen Einheitskreis (ohne Q) und y-Achse sind wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \text{Einheitskreis} \setminus \{Q\} &\to y\text{-Achse} \\ (x,y) &\mapsto t = \frac{y}{x+1} \\ (x,y) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) &\leftarrow\!\shortmid t \end{aligned}$$

Geometrisch ist klar, dass sich diese beiden Abbildungen gegenseitig rückgängig machen.[1] Ausserdem sieht man aus den obigen Zuordnungen:

- Genau dann ist t eine rationale Zahl, wenn x und y rationale Zahlen sind.
  Man sagt: **Rationale Punkte** T auf der y-Achse entsprechen **rationalen Punkten** P auf dem Einheitskreis (ohne Q).
- Genau dann gilt $t \in (0,1)$, wenn der zugeordnete Punkt $P = (x,y)$ im «rechten oberen Viertel» des Einheitskreises liegt, also $x > 0$ und $y > 0$ erfüllt.
  (Dies ist geometrisch vollkommen klar, kann aber auch leicht algebraisch begründet werden.)

Schritt 2: Von pythagoreischen Tripeln zu rationalen Punkten auf dem rechten oberen Viertel des Einheitskreises:

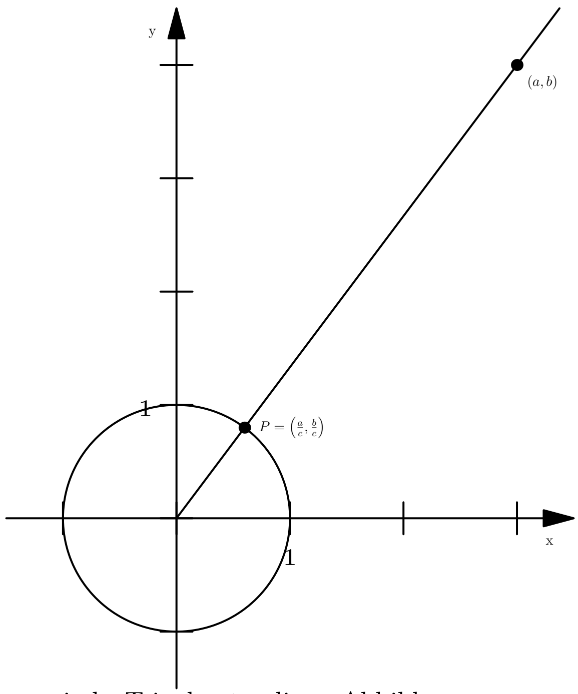
Sei (a,b,c) ein pythagoreisches Tripel. Wir betrachten den Punkt (a,b) in der Ebene. Sein Abstand zum Ursprung ist

$$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{c^2} = c$$

Wenn wir den Punkt also vom Ursprung aus mit dem Faktor $\frac{1}{c}$ strecken, so erhalten wir den Punkt

$$P = \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$$

auf dem Einheitskreis. Seine beiden Koordinaten sind positive rationale Zahlen. Also ist P ein rationaler Punkt im rechten oberen Viertel des Einheitskreises.
Wir erhalten so eine Abbildung



$$\begin{aligned} \{\text{Pythagoreische Tripel}\} &\to \left\{\begin{array}{l}\text{rationale Punkte} \\ \text{im rechten oberen} \\ \text{Viertel des Ein-} \\ \text{heitskreises}\end{array}\right\} \\ (a,b,c) &\mapsto P = \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) \end{aligned}$$

Nach Konstruktion dieser Abbildung ist klar, dass zwei pythagoreische Tripel unter dieser Abbildung genau dann auf denselben Punkt abgebildet werden, wenn sie «rational proportional» sind.[2]

[1] Der Vollständigkeit halber rechne ich es hier nach:

- Startet man rechts mit t auf der y-Achse, geht dann zum Einheitskreis und wieder zu y-Achse, so erhält man wie gewünscht wieder t zurück:

$$\frac{y}{x+1} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+1} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2+1+t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{2} = t$$

- Startet man links mit (x,y) auf dem Einheitskreis, geht dann zur y-Achse und wieder zum Einheitskreis, so erhält man wie gewünscht wieder (x,y) zurück:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) &= \left(\frac{1-\left(\frac{y}{x+1}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x+1}\right)^2}, \frac{2\left(\frac{y}{x+1}\right)}{1+\left(\frac{y}{x+1}\right)^2}\right) && \text{beide Brüche mit } (x+1)^2 \text{ erweitern} \\ &= \left(\frac{(x+1)^2-y^2}{(x+1)^2+y^2}, \frac{2y(x+1)}{(x+1)^2+y^2}\right) \\ &= \left(\frac{x^2+2x+1-y^2}{x^2+2x+1+y^2}, \frac{2y(x+1)}{x^2+2x+1+y^2}\right) && \text{Nutze } x^2+y^2=1 \text{ bzw. } 1-y^2=x^2 \\ &= \left(\frac{2x^2+2x}{2x+2}, \frac{2y(x+1)}{2x+2}\right) \\ &= \left(\frac{x(x+1)}{x+1}, \frac{y(x+1)}{x+1}\right) \\ &= (x,y) \end{aligned}$$

[2] Formal algebraisch geht das Argument wie folgt.

Schritt 3: Jeder rationale Punkt auf dem rechten oberen Viertel des Einheitskreise kommt von einem pythagoreischen Tripel in «Euklid-Form» $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 - n^2)$ **her:**

Sei $P = (x, y)$ ein rationaler Punkt auf dem rechten oberen Viertel des Einheitskreise. Nach Schritt 1 gibt es genau eine rationale Zahl $t \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ mit

$$P = (x, y) = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2} \right)$$

Da t rational ist und im Intervall $(0, 1)$ liegt, gibt es positive natürliche Zahlen $m > n > 0$ mit

$$t = \frac{n}{m}$$

(wer mag, kann hier m und n teilerfremd wählen; dies ist aber nicht nötig).

Eingesetzt in die obigen Gleichungen für x und y erhalten wir

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} = \frac{1 - \frac{n^2}{m^2}}{1 + \frac{n^2}{m^2}} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \\ y &= \frac{2t}{1 + t^2} = \frac{2\frac{n}{m}}{1 + \frac{n^2}{m^2}} = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \end{aligned}$$

Aus der Abbildung in Schritt 2 sehen wir nun, dass unser Punkt $P = (x, y)$ vom pythagoreischen Tripel in «Euklid-Form»

$$(m^2 - n^2, 2mn, m^2 - n^2)$$

herkommt.

Schritt 4: Ende des Beweises:

Sei (a, b, c) ein pythagoreisches Tripel. Diesem haben wir in Schritt 2 einen rationalen Punkt P auf dem rechten oberen Viertel des Einheitskreises zugewiesen. In Schritt 3 haben wir dann gesehen, dass dieser Punkt P von einem pythagoreischen Tripel $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ in Euklid-Form herkommt. Da wir in Schritt 2 auch gesehen haben, dass zwei pythagoreische Tripel genau dann denselben rationalen Punkt auf dem Einheitskreis liefern, wenn sie rational proportional sind, sind Ausgangstripel (a, b, c) und «Euklid-Tripel» $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ rational proportional.

$\square$

Sind (a, b, c) und (a', b', c') pythagoreische Tripel mit

$$\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c} \right) = \left(\frac{a'}{c'}, \frac{b'}{c'} \right)$$

also

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \qquad \text{und} \qquad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

so gilt $\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c} = \frac{b'}{b}$ und Multiplikation mit dieser rationalen Zahl sendet das erste Tripel auf das zweite. Sind umgekehrt (a, b, c) und (qa, qb, qc) mit $q \in \mathbb{Q}^*$ rational proportioanle Tripel, so gilt offensichtlich

$$\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c} \right) = \left(\frac{qa}{qc}, \frac{qb}{qc} \right)$$

9.11 Erster Versuch: Pythagoreische Tripel (enhtält zwar mehr Information, aber zu viele Teilbarkeitsargumente, die den geometrischen Kern des Arguments eher verschleiern)

9.11.1. Besonders «schöne» rechtwinklige Dreiecke sind solche, bei denen alle Seitenlängen positive natürliche Zahlen sind (in einer geeigneten fixierten Längeneinheit gemessen, etwa Zentimeter).

Definition 9.11.2 Pythagoreische Tripel

Ein **pythagoreisches Tripel** ist ein Tripel (a, b, c) positiver $\boxed{\text{natürlicher}}$ Zahlen mit

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ein pythagoreisches Tripel (a, b, c) heisst **primitiv**, falls a, b und c ausser der 1 keinen gemeinsamen Teiler haben.

Beispiele 9.11.3. Das bekannteste pythagoreische Tripel ist $(3, 4, 5)$, denn $3^2 + 4^2 = 5^2$. Andere Beispiele sind $(5, 12, 13)$ oder $(8, 15, 17)$. Diese drei Tripel sind primitiv. Natürlich ist auch $(4, 3, 5)$ ein primitives pythagoreisches Tripel (es entsteht aus $(3, 4, 5)$ durch Vertauschen der «Kathethen» a und b).
Nicht primitiv ist das pythagoreische Tripel $(21, 28, 35)$, denn alle Komponenten (= Einträge) sind durch 7 teilbar: Es entsteht aus dem primitiven pythagoreischen Trupel $(3, 4, 5)$ durch (komponentenweise) Multiplikation mit 7.

⚒ Aufgabe A34

(a) Testen Sie den rechts angegebenen Algorithmus für einige Wahlen von a.

(b) Zeigen Sie allgemein, dass dieser Algorithmus pythagoreische Tripel liefert (u. a. ist zu zeigen, dass b eine positive natürliche Zahl ist).
Zusätzlich können Sie sich überlegen:
- alle so erhaltenen pythagoreischen Tripel sind primitiv;
- man erhält auf diese Weise alle pythagoreischen Tripel (a, b, c) mit $c = b + 1$.

Algorithmus 9.11.4

(1) Wähle eine beliebige ungerade Zahl $a \geq 3$.
(2) Setze $b := \frac{a^2-1}{2}$.
(3) Ausgabe: $(a, b, b+1)$ ist ein pythagoreisches Tripel

Satz 9.11.5 Erzeugung primitiver pythagoreischer Tripel; Euklids Formel

Für beliebige natürliche Zahlen $m > n > 0$ ist

$$a = m^2 - n^2 \qquad b = 2mn \qquad c = m^2 + n^2$$

ein pythagoreisches Tripel (Beweis siehe Aufgabe A35).
Wenn m und n teilerfremd sind (d. h. $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ gilt) und nicht beide ungerade sind (was wegen der Teilerfremdheit bedeutet, dass eine der beiden Zahlen gerade ist und die andere ungerade), dann ist das obige Tripel (a, b, c) primitiv mit ungeradem a und geradem b; ausserdem entsteht $\boxed{\text{jedes primitive pythagoreische Tripel mit ungeradem } a \text{ und geradem } b}$ auf diese Weise aus eindeutig bestimmten teilerfremden Zahlen $m > n > 0$, die nicht beide ungerade sind.

9.11.6. Warum dieser Satz eine Klassifikation aller pythagoreischer Tripel liefert, erklären wir in 9.11.7.

⚒ Aufgabe A35

(a) Zeige die erste Behauptung in Satz 9.11.5: Sind $m > n > 0$ natürliche Zahlen, so ist $(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ ein pythagoreisches Tripel.

(b) Rechne für 10 verschiedene (eher kleine) Wahlen von $m > n > 0$ (mit m und n teilerfremd, nicht beide ungerade) das zugehörige pythagoreische Tripel aus.

Beweis von Satz 9.11.5. Seien zwei teilerfremde natürliche Zahlen $m > n > 0$ gegeben, die nicht beide ungerade sind. (Also ist wegen der Teilerfremdheit entweder m gerade und n ungerade oder umgekehrt.)

Seien $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$ wie im Satz angegeben. (Offensichtlich ist a ungerade und b ist gerade.)

Schritt 0: Das Tripel (a, b, c) ist pythagoreisch. Das ist leicht zu zeigen, siehe (Lösung von) Aufgabe A35.(a).

Schritt 1: Wir zeigen, dass das pythagoreische Tripel $(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ primitiv ist.

Falls das Tripel nicht primitiv ist, so gibt es eine Primzahl p, die alle drei Zahlen a, b, c teilt.

Der Fall $p = 2$ kann nicht auftreten, denn $a = m^2 - n^2$ ist ungerade (da entweder m ungerade und n gerade ist oder andersherum).

Also gilt $p > 2$. Da p sowohl $a = m^2 - n^2$ als auch $c = m^2 + n^2$ teilt, teilt p auch die Summe $a + c = 2m^2$. Da p ungerade und prim ist, teilt p auch m^2 und m. Dann teilt p aber auch $n^2 = c - m^2$ und somit n. Damit teilt p sowohl m als auch n im Widerspruch zur Annahme, dass m und n teilerfremd sind.

Also ist (a, b, c) ein primitives pythagoreisches Tripel (mit b gerade).

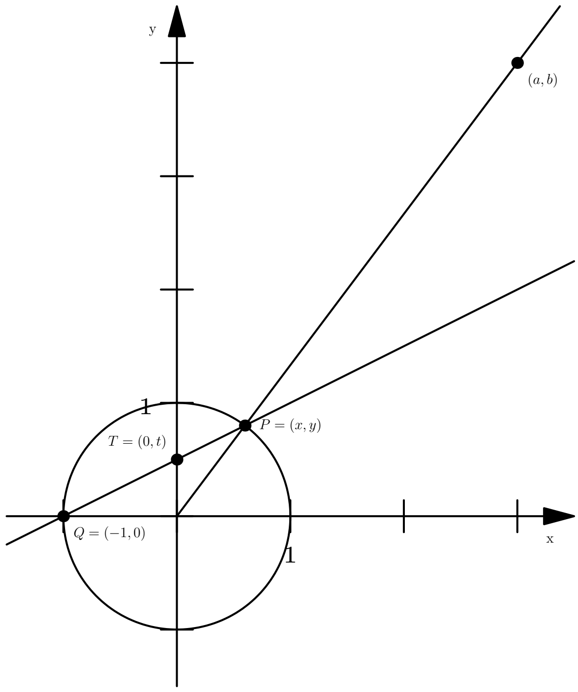
Schritt 2: Es bleibt zu zeigen, dass jedes primitive pythagoreische Tripel mit geradem b eindeutig auf diese Weise entsteht.

Dem Beweis liegt eine geometrische Idee zugrunde, die rechts illustriert wird.

Sei (a, b, c) ein pythagoreisches Tripel (noch wird nicht angenommen, dass es primitiv ist oder dass b gerade ist). Aus $a^2 + b^2 = c^2$ folgt per Division durch c^2 die Gleichung $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$. Mit der Substitution $x = \frac{a}{c} \in \mathbb{Q}$ und $y = \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$ wird diese Gleichung zu

$$x^2 + y^2 = 1$$

Mit anderen Worten haben wir nun zwei positive *rationale* Zahlen x, y, die die obige Gleichung erfüllen bzw. geometrisch ausgedrückt einen *rationalen* Punkt $P = (x, y) \in \mathbb{Q}^2$ auf dem Einheitskreis (= Kreis mit Radius 1 um den Ursprung). (Der Punkt P liegt auf dem Einheitskreis, denn sein Abstand zum Ursprung beträgt $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1} = 1$.) Die Verbindungslinie von P mit $Q = (-1, 0)$ schneidet die y-Achse in einem Punkt $T = (0, t)$.



Wegen des Strahlensatzes (die beiden betrachteten Strahlen sind die x-Achse und die Gerade (QP); sie werden von der y-Achse und der dazu parallelen Geraden durch P geschnitten) gilt

$$t = \frac{t}{1} = \frac{y}{x+1} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$$

Man beachte, dass t eine *rationale* Zahl ist.

Wegen $0 < y < 1$ und $0 < x < 1$ folgt $0 < y < x + 1$ und somit ausserdem $t \in (0, 1)$ wie oben angegeben.

Wir werden später $t = \frac{n}{m}$ ansetzen, überlegen uns aber zuerst, wie man x und y aus t berechnen kann.

Beachte, dass die beiden Gleichungen $y = t(x+1)$ und $x^2 + y^2 = 1$ gelten. Indem wir y in der zweiten Gleichung substituieren erhalten wir

$$\begin{aligned} x^2 + t^2(x+1)^2 &= 1 \\ x^2 - 1 + t^2(x+1)^2 &= 0 \\ (x+1)(x-1) + t^2(x+1)^2 &= 0 && \text{Division durch } x+1>0 \\ x - 1 + t^2(x+1) &= 0 \\ x - 1 + t^2x + t^2 &= 0 \\ x(1+t^2) &= 1 - t^2 \\ x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} && \text{und somit} \quad y = t(x+1) = t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right) = \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned}$$

Für beliebiges $t \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ erhält man so einen rationalen Punkt (x, y) auf dem oberen rechten Viertel des Einheitskreises.

Da $0 < t < 1$ rational ist, gibt es eindeutig bestimmte teilerfremde natürliche Zahlen $m > n > 0$ mit $t = \frac{n}{m}$. Dann gelten

$$\frac{a}{c} \overset{\text{Definition von } x}{=} x = \frac{1-\frac{n^2}{m^2}}{1+\frac{n^2}{m^2}} = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} \quad \text{und} \quad \frac{b}{c} \overset{\text{Definition von } y}{=} y = \frac{2\frac{n}{m}}{1+\frac{n^2}{m^2}} = \frac{2mn}{m^2+n^2} \tag{9.1}$$

Leicht ist man nun versucht zu vermuten, dass $a = m^2 - n^2$ und $b = 2mn$ und $c = m^2 + n^2$ gelten. Dies ist aber im Allgemeinen nicht der Fall. Der Leser überlege sich zum Beispiel in den folgenden beiden Fällen, welche Werte x, y, t, m, n und $m^2 - n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$ haben:

- $(a, b, c) = (6, 8, 10)$ (dies führt auf dieselben Werte wie $(a, b, c) = (3, 4, 5)$)
- $(a, b, c) = (4, 3, 5)$

Wenn man nun zusätzlich annimmt, dass das Tripel (a, b, c) primitiv ist, so gelten

- $\text{ggT}(a, c) = 1$, denn sonst würde eine Primzahl p sowohl a als auch c teilen und damit auch $b^2 = c^2 - a^2$ und damit auch b, was im Widerspruch zur Primitivität des Tupels steht.
  Vielleicht sollte man irgendwo schreiben, dass Primitivität eines pythagoreischen Tripels (a, b, c) dazu äquivalent ist, dass beliebige zwei der drei Zahlen a, b, c teilerfremd sind.
- $\text{ggT}(b, c) = 1$ (Beweis analog).

Insbesondere sind die Brüche $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ vollständig gekürzt.

Sei nun zusätzlich b gerade vorausgesetzt. (Daraus folgt, dass c ungerade ist, denn a kann nicht gerade sein.) Umschreiben der Gleichung $\frac{b}{c} = y = \frac{2mn}{m^2+n^2}$ zu

$$b(m^2 + n^2) = 2mnc$$

zeigt, dass nicht sowohl m als auch n ungerade sein können (denn in diesem Fall wäre die linke Seite durch 4 teilbar (da b gerade ist und $m^2 + n^2$ gerade), die rechte Seite aber nicht (denn m, n und c sind ungerade)).

In diesem Fall (m und n teilerfremd, nicht beide ungerade) haben wir aber in Schritt 1 gesehen, dass das pythagoreische Tripel $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ primitiv ist. Insbesondere bedeutet dies, dass je zwei dieser drei Zahlen teilerfremd sind (Argument siehe oben), dass also auch die Brüche $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$ und $\frac{2mn}{m^2+n^2}$ vollständig gekürzt sind.

Aus den beiden Gleichheiten *vollständig gekürzter* Brüche in (9.1) folgt[3] also

$$a = m^2 - n^2 \qquad b = 2mn \qquad c = m^2 + n^2$$

Dies zeigt, dass jedes primitive pythagoreische Tripel mit geradem b auf die gesuchte Weise entsteht.

Schlussendlich ist noch zu zeigen, dass aus $a = m'^2 - n'^2$ und $b = 2m'n'$ und $c = m'^2 + n'^2$ (mit teilerfremden Zahlen $m' > n' > 0$, nicht beide ungerade) bereits $m = m'$ und $n = n'$ folgt. Es gilt dann aber

$$t = \frac{y}{x+1} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}+1} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a+c}{c}} = \frac{b}{a+c} = \frac{2m'n'}{2m'^2} = \frac{n'}{m'}$$

und wegen $t = \frac{n}{m}$ und der eindeutigen Darstellung einer positiven rationalen Zahl als Quotient teilerfremder natürlicher Zahlen folgt $n = n'$ und $m = m'$. □

[3] Das genaue Argument, dass aus einer Gleichheit $\frac{z}{n} = \frac{z'}{n'}$ vollständig gekürzter Brüche bereits Zählergleichheit $z = z'$ und Nennergleichheit $n = n'$ folgen, verwendet die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.

9.11.7. Satz 9.11.5 liefert eine Klassifikation aller pythagoreischen Tripel: Jedes nicht-primitive pythagoreische Tripel kann durch «Division durch den ggT» zu einem primitiven pythagoreischen Tripel gemacht werden. Deswegen genügt es, die primitiven pythagoreischen Tripel zu klassifizieren.

Ist (a, b, c) ein primitives pythagoreisches Tripel, so

- können nicht a und b gerade sein: Sonst ist auch $c^2 = a^2 + b^2$ gerade, damit ist c gerade und das Tripel ist nicht primitiv (da 2 ein gemeinsamer Teiler von a, b, c ist).

- können nicht a und b ungerade sein: Sonst sind a^2 und b^2 ungerade, also ist $c^2 = a^2 + b^2$ gerade, also ist c gerade.

  Zwischenüberlegungen:

  - Ist $x = 2n + 1$ eine beliebige ungerade Zahl, so hat ihr Quadrat $x^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4(n^2 + n) + 1$ bei Division durch 4 den Rest 1.
  - Ist $x = 2n$ eine beliebige gerade Zahl, so hat ihr Quadrat $x^2 = (2n)^2 = 4n^2$ bei Division durch 4 den Rest 0.

  Nach der Zwischenüberlegung hat c^2 als Quadrat einer geraden Zahl den Rest 0 bei Division durch 4. Da aber a^2 und b^2 als Quadrate ungerader Zahlen den Rest 1 bei Division durch 4 haben, hat $a^2 + b^2$ den Rest 2 bei Division durch 4. Aber $c^2 = a^2 + b^2$ kann nicht sowohl den Rest 0 als auch den Rest 2 bei Division durch 4 haben. Widerspruch. Also kann es nicht sein, dass sowohl a als auch b ungerade sind.

Also gilt entweder a gerade und b ungerader oder a ungerade und b gerade.

Durch Vertauschen von a und b können wir annehmen, dass a ungerade und b gerade ist. Primitive pythagoreische Tripel dieser Art werden aber durch den obigen Satz klassifiziert.

Genauer: Alle Paare (m, n) teilerfremden natürlichen Zahlen $m > n > 0$, nicht beide ungerade, liefern alle primitiven pythagoreischen Tripel (a, b, c) mit a ungerade und b gerade (und jedes solche Tripel genau einmal).

Jedes dieser primitiven pythagoreischen Tripel liefert durch Vertauschen von a und b ein weiteres primitives pythagoreisches Tripel mit erstem Eintrag gerade und zweitem Eintrag ungerade. Nach den obigen Erklärungen erhalten wir so alle primitiven pythagoreischen Tripel (und jedes genau einmal). Durch Multiplikation dieser primitiven pythagoreischen Tripel mit beliebigen positiven natürlichen Zahlen erhält man alle pythagoreischen Tripel.

9.12 Archimedes, Bestimmung von π

Mittlerweile aufgeschrieben im Skript «Flächen und Volumina», Abschnitt «Numerische Mathematik: Approximation der Kreiszahl π»; eventuell hierher kopieren?

Das Verfahren von Archimedes zur Bestimmung von π geht so: Betrachte ein dem Einheitskreis einbeschriebenes Sechseck und das zugehörige umbeschriebene Sechseck. Gehe durch sukzessives Halbieren zu den ein- und umbeschriebenen 12-Ecken, 24-Ecken usw. über. Damit bekommt man zwei Folgen von Umfängen, die gegen π konvergieren (wieso?).

Das Verfahren inklusive Formeln ist hier nett beschrieben: https://de.wikipedia.org/wiki/Archimedischer_Algorithmus

Aufgabe: Sehne in Kreis gegeben. Berechne daraus einerseits die Länge des «zugehörigen Tangentenabschnitts» (Strahlensatz) und andererseits die Länge der «Sehne nach Halbierung».

Ich hatte damit mal in Python herumgespielt, hatte jedoch Probleme mit Rundungsfehlern, wenn ich mich recht erinnere... Eventuell gut geeignet für Informatik, zweite Klassen, wie auch pythagoreische Tripel. (Rundungsfehler thematisieren?)

9.13 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A1 ex-pythagoras-drei-beweise

(a) Die beiden grossen Quadrate haben denselben Flächeninhalt (nämlich $(a+b)^2$). Wenn man davon jeweils die Fläche der vier roten Puzzlesteine abzieht, verbleibt die gleiche Fläche. Das bedeutet, dass das weisse Quadrat im linken Bild dieselbe Fläche hat wie die beiden weissen Quadrate im rechten Bild, dass also $c^2 = a^2 + b^2$ gilt.

(b) Einerseits ist die Fläche des grossen Quadrats $(a+b)^2$, andererseits ist sie die Summe der Flächen der vier Puzzlesteine (jeweils $\frac{1}{2}ab$) plus die Fläche des weissen Quadrats (c^2), d. h.

$$(a+b)^2 = (\text{Fläche des grossen Quadrats}) = (\text{Fläche des weissen Quadrats})+4\cdot(\text{Fläche Puzzlestein}) = c^2+4\cdot\frac{1}{2}ab$$

Daraus ergibt sich per ausmultiplizeren und vereinfachen:

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

(c) Einerseits ist die Fläche des grossen Quadrats c^2, andererseits ist sie die Summe der Flächen der vier Puzzlesteine (jeweils $\frac{1}{2}ab$) plus die Fläche des weissen Quadrats ($(b-a)^2$), d. h.

$$c^2 = (\text{Fläche des grossen Quadrats}) = (\text{Fläche des weissen Quadrats})+4\cdot(\text{Fläche Puzzlestein}) = (b-a)^2+4\cdot\frac{1}{2}ab$$

Daraus ergibt sich per ausmultiplizeren und vereinfachen:

$$c^2 = b^2 - 2ab + a^2 + 2ab$$
$$a^2 = a^2 + b^2$$

Bemerkung: Damit das Bild «stimmt», ist hier $b > a$ vorausgesetzt.

Lösung zu A2 ex-pythagoras-legepuzzle-aus-scherungsbeweis

Ganz am Ende dieses Skript findet man das entsprechende Legepuzzle viermal zum Ausdrucken und Ausschneiden.

Lösung zu A3 ex-wurzeln

a) $\sqrt{144} = 12$

b) $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$

c) $\sqrt{1} = 1$

d) $\sqrt{0} = 0$

e) $\sqrt{-1} =$ nicht definiert

f) $\sqrt{3^{2024} \cdot 7^4} = 3^{1012} \cdot 7^2$

g) $\sqrt{\frac{3^{2024}}{7^4}} = \frac{3^{1012}}{7^2}$

h) $\sqrt{2^{42} \cdot 3^{-2024} \cdot 7^4} = 2^{21} \cdot 3^{-1012} \cdot 7^2$

i) $\sqrt{(-2024)^2} = 2024$

j) $\sqrt{x^2} = |x|$; Achtung, ohne Betragsstriche falsch (für negatives x)!
Man kann dies auch mit einer Fallunterscheidung aufschreiben: $\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$;

k) $\sqrt{x^2} = x$ für beliebiges $x \geq 0$

l) $\sqrt{x^2} = -x$ für beliebiges $x < 0$

Lösung zu A4 ex-wurzelgesetze

a) $\sqrt{3^{2025}} = \sqrt{3^{2024} \cdot 3} = \sqrt{3^{2024}} \cdot \sqrt{3} = 3^{1012} \cdot \sqrt{3}$

b) $\sqrt{3^{2025} \cdot 7^5} = \sqrt{3^{2025}} \cdot \sqrt{7^5} = 3^{1012} \cdot 7^2 \cdot \sqrt{3 \cdot 7}$

c) $\sqrt{a^2} = a$

d) $\sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \cdot a$

e) $\sqrt{3a^2} = \sqrt{3} \cdot a$

f) $\sqrt{4a^2} = 2a$

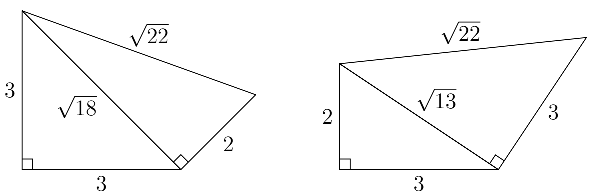
g) $\sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ (ohne Wurzel im Nenner angeben!)

h) $\sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (ohne Wurzel im Nenner angeben!)

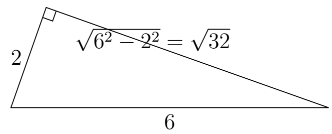
Lösung zu A5 ex-pythagoras-wurzelschnecke

a) Wegen $13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2$ zeichne man ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Länge 3 und 2 (entlang der Linien des Kästchenpapiers). Seine Hypotenuse hat die gesuchte Länge $\sqrt{13}$.
Es gibt auch andere Lösungen (etwa die «brutale» mit der Wurzelschnecke aus Teilaufgabe (d); etwas besser sind die sich aus $13 = 3^2 + 1^1 + 1^2 + 1^2 + 1^2$ oder $13 = 4^2 - 2^2 + 1^1$ oder (umständlicher, vergleiche Teilaufgabe (c)) $13 = 4^2 - 1^2 - 1^1 - 1^2$ ergebenden Lösungen.

b) Wegen $22 = 9 + 9 + 4 = 3^2 + 3^2 + 2^2 = 18 + 4 = 13 + 9$ tut es jede der rechts durch Zeichnungen angedeuteten Konstruktionen. Die Rechnungen zu den Beschriftungen in der linken Konstruktion sind $\sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$ und $\sqrt{\sqrt{18}^2 + 2^2} = \sqrt{18 + 4} = \sqrt{22}$.



c) Wegen $32 = 36 - 4 = 6^2 - 2^2$ ist es wohl am einfachsten, ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse der Länge 6 und einer Kathete der Länge 2 zu konstruieren (zeichne Strecke der Länge 6, Thaleskreis darüber, dann Kreis mit Radius 2 um einen der Endpunkte). Die andere Kathete hat dann die gewünschte Länge.



d) Die Längen links sind in offensichtlicher Reihenfolge: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4} = 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$.
Die Längen rechts sind $\sqrt{2} \cdot a, \sqrt{3} \cdot a, \sqrt{4} \cdot a = 2a, \sqrt{5} \cdot a, \sqrt{6} \cdot a, \sqrt{7} \cdot a$.

Lösung zu A6 ex-gleichseitiges-dreieck

(a) Die Höhe teilt h teilt das Dreieck in zwei (kongruente) rechtwinklige Dreiecke mit Hypotenuse a und Katheten h und $\frac{a}{2}$. Nach Pythagoras gilt also

$$
\begin{aligned}
a^2 &= h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
a^2 &= h^2 + \frac{a^2}{4} \\
\frac{3}{4}a^2 &= h^2 \\
h &= \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a
\end{aligned}
$$

Die Fläche ergibt sich somit nach der Formel «einhalb mal Grundseite mal Höhe» zu

$$F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

(b) Man kann entweder die obige Formel $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ durch a dividieren oder sie so verwenden:

$$\frac{h}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(c) Die obige Formel $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ist nach a aufzulösen. Multiplikation mit $\frac{2}{\sqrt{3}}$ liefert

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}}h = \frac{2\sqrt{3}}{3}h$$

Lösung zu A7 ex-rechtwinklig-gleichschenkliges-dreieck

Betrachten Sie ein beliebiges **gleichschenkliges rechtwinkliges** Dreieck mit Hypotenuse c und Katheten $a = b$ (bitte Skizze anfertigen).

(a) Das Dreieck hat die Winkel 90° und zweimal 45°.

(b) Nach Pythagoras gilt $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, also $c = \sqrt{2}a$.

Nimmt man eine Kathete als Grundseite, so ist die andere Kathete die zugehörige Höhe und die Fläche ist

$$F = \frac{1}{2}a \cdot b = \frac{1}{2}a^2$$

d.h. die halbe Fläche eines Quadrats der Seitenlänge a, was auch geometrisch klar ist.

(c) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}c = \frac{\sqrt{2}}{2}c$.

Fläche: $F = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{4}c^2$. Dies ist auch geometrisch plausibel, denn in ein Quadrat der Seitenlänge c passt das betrachtete Dreieck viermal.

(d) $\frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Lösung zu A8 ex-30-60-90-dreieck

(a) Spiegelt man das gegebene Dreieck an der längeren Kathete x, so bilden das Ausgangsdreieck und sein Spiegelbild zusammen ein gleichseitiges Dreieck. Folglich gelten

$$y = \frac{1}{2}a \qquad x = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

wobei die zweite Gleichung nach Pythaogoras gilt bzw. nach der vorherigen Aufgabe A6, denn x ist die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge a.

Alternative: Man kann das Dreieck auch durch Teilen des rechten Winkels in einen 60°-Winkel und einen 30°-Winkel in ein gleichseitiges und ein gleichschenkliges Dreieck zerlegen und so sehen, dass die Hypotenuse a doppelt so lang ist wie die kürzere Kathete y.

Die obigen beiden Gleichungen geben x und y in Abhängigkeit von a an.

- Ist x gegeben, so gelten

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}}x = \frac{2\sqrt{3}}{3}x \qquad y = \frac{1}{2}a = \frac{1}{\sqrt{3}}x = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

- Ist y gegeben, so gelten

$$a = 2y \qquad x = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \sqrt{3}y$$

(b)

$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{y}{a} = \frac{1}{2} \qquad \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(c) Hier einer von vielen Lösungswegen: Nach dem Kathetensatz gilt $qa = y^2$ und somit

$$q = \frac{y^2}{a} = \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4}$$

(Alternative: Das Dreieck mit den Seiten y, h und q ist ein 90°-60°-30°-Dreieck mit q als kürzerer Kathete, die deswegen halb solang ist wie die Hypotenuse y, d.h. $q = \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}a$.)

Wegen $p + q = a$ ergibt sich $p = a - q = a - \frac{a}{4} = \frac{3}{4}a$.

Aus dem Höhensatz $h^2 = pq$ folgt nun

$$h = \sqrt{pq} = \sqrt{\frac{3}{4}a \cdot \frac{a}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

Lösung zu A9 ex-pythagoras-aehnliche-figuren

Die blaue Figur ist ähnlich zur grauen Figur mit Ähnlichkeitsfaktor/Streckfaktor c. Da die Fläche sich mit dem Quadrat des Streckfaktors ändert, folgt die erste Gleichung, die anderen beiden bekommt man analog.

$$\text{Hellblau} = c^2 \cdot \text{Grau} \qquad \text{Gelb} = a^2 \cdot \text{Grau} \qquad \text{Rosa} = b^2 \cdot \text{Grau}$$

Mit «Grau» ist genaugenommen «Fläche der grauen Figur» gemeint etc.

Daraus erhalten wir mit dem «normalen Pythagoras» $c^2 = a^2 + b^2$

$$\text{Hellblau} = c^2 \cdot \text{Grau} = (a^2 + b^2) \cdot \text{Grau} = a^2 \cdot \text{Grau} + b^2 \cdot \text{Grau} = \text{Gelb} + \text{Rosa}$$

Lösung zu A10 ex-moendchen-des-hippokrates

Nach (der Bemerkung in) Aufgabe A9 gilt: Der Halbkreis über der Hypotenuse (nach oben oder unten eingezeichnet) ist genauso gross wie die beiden Halbkreise über den Katheten zusammen.

Damit erhalten wir: (Genaugenommen ist jeweils die Fläche der genannten Figur gemeint.)

$$\begin{aligned}
\text{Hellblau} &= \text{Halbkreis über } c) - (\text{linker weisser Bereich}) - (\text{rechter weisser Bereich}) \\
&= (\text{Halbkreis über } a) + (\text{Halbkreis über } b) - (\text{linker weisser Bereich}) - (\text{rechter weisser Bereich}) \\
&= (\text{Halbkreis über } a) - (\text{rechter weisser Bereich}) + (\text{Halbkreis über } b) - (\text{linker weisser Bereich}) \\
&= \text{Rosa} + \text{Gelb}
\end{aligned}$$

Lösung zu A11 ex-abstand-R2

(a) Fälle von P das Lot auf die x-Achse (oder auf die y-Achse)und nenne den Fusspunkt F. Das Dreieck UFP ist rechtwinklig. Die Längen der beiden Katheten sind 2 und 5 und $[UP]$ ist die Hypotenuse. Also gilt nach Pythagoras

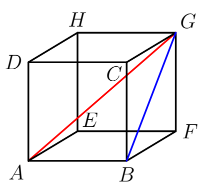
$$\overline{UP} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}.$$

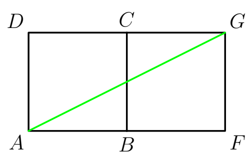
(b) Zeichne durch P und Q parallele Geraden zu x und y-Achse. Es ergeben sich zwei rechtwinklige Dreiecke, deren Kathetenlängen sich leicht aus den Koordinaten von P und Q ergeben: $a = |x_P - x_Q| = |2 - 5| = 3$ und $b = |y_P - y_Q| = |5 - 1| = 4$. Die Hypotenuse ist $[PQ]$ und hat somit nach Pythaogoras die Länge

$$\overline{PQ} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

(c) $\overline{PQ} = \sqrt{|x_P - x_Q|^2 + |y_P - y_Q|^2} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$

Lösung zu A12 ex-pythagoras-raumdiagonale





(a) Die blaue (Seitenflächen-)Diagonale $[BG]$ hat wegen Pythagoras die Länge $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Da das Dreieck $\triangle ABG$ rechtwinklig bei B ist, hat die rote Raumdiagonale die Länge $\sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

(b) Klappt man den Würfel auf, so ist die grüne Strecke $[AG]$ ein kürzester Weg für den Marienkäfer (es gibt fünf andere genauso kurze Wege). Seine Länge ist $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

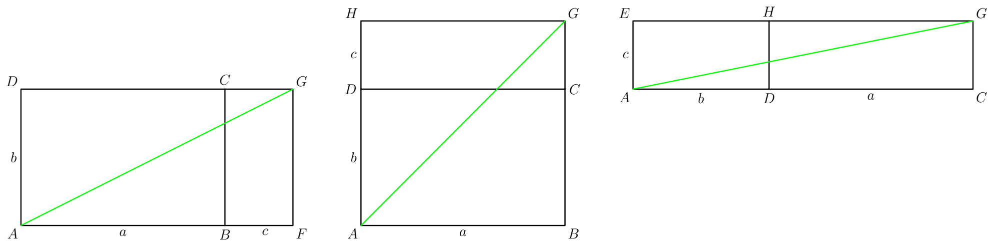
(c) Zunächst gilt $\overline{BG} = \sqrt{b^2+c^2}$. Somit hat die Raumdiagonale die Länge $\overline{AG} = \sqrt{a^2 + \sqrt{b^2+c^2}^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

(d) Der bei der Kante $[BC]$ aufgeklappte Würfel ist unten links abgebildet und der kürzeste Weg von A nach G über diese Kante ist grün eingezeichnet. Seine Länge ist

$$\sqrt{(a+c)^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2+2ac}$$

(e) Der kürzeste Weg muss über eine der sechs Kanten $[BC]$, $[CD]$, $[DH]$, $[HE]$, $[EF]$, $[FB]$ führen. Wenn man jeweils die beiden an diesen Kanten anliegenden Würfelseiten aufklappt, erhält man sechs Figuren, von denen unten drei abgebildet sind; die anderen drei sehen bis auf Vertauschen gegenüberliegender Eckpunkte genauso aus. Man berechnet die Längen der drei grünen Strecken (von links nach rechts) zu $\sqrt{a^2+(b+c)^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2+2ac}$, $\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc}$ und $\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab}$. Wegen $0 \leq c \leq b \leq a$ gilt $bc \leq ac \leq ab$. Also ist $\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc}$ kleiner-gleich als die beiden anderen Weglängen. Der mittlere grüne Weg ist also kürzer als die beiden anderen, wie man auch leicht mit dem Lineal überprüft.

In Worten ist es also für den Marienkäfer am kürzesten, einen der beiden Wege über die längste Kante zu nehmen (genauer den über $[DC]$ oder den über $[EF]$.



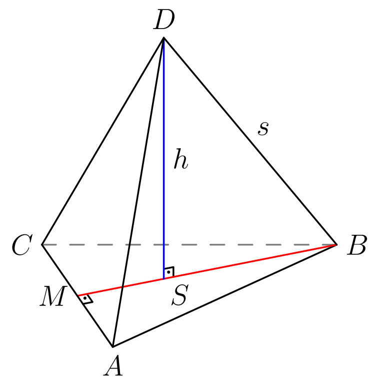
Lösung zu A13 ex-pythagoras-tetraeder

Der Tetraeder besteht – wie schon der Name besagt – aus 4 Flächen. Er hat 6 Kanten und 4 Ecken; das ist hoffentlich klar aus dem Bild rechts. Der Punkt M dort ist der Mittelpunkt zwischen A und C.

Zur Seitenhöhe: Die rot eingezeichnete Strecke $[MB]$ ist eine solche Höhe (der „unten liegenden“ Seite). Wie in Aufgabe A8 berechnet, hat sie die Länge $\overline{MB} = \frac{\sqrt{3}}{2}s \approx 0.8660s$.

Zur Körperhöhe: Sei S derjenige Punkt im Dreieck ABC, für den $[DS]$ senkrecht auf dem Dreieck steht. Dann ist $h = [DS]$ die Höhe des Tetraeders. Aus Symmetriegründen muss S der Schwerpunkt des Dreiecks ABC sein (erkläre ich gerne genauer, wenn gewünscht).

Wir wissen bereits, dass der Schwerpunkt jedes Dreiecks jede Seitenhalbierende im Verhältnis $2:1$ teilt. Also gilt $\overline{SB} = \frac{2}{3}\overline{MB} \overset{\text{siehe oben}}{=} \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}s = \frac{\sqrt{3}}{3}s$. Pythagoras, angewandt auf das *rechtwinklige* Dreieck BDS liefert somit



$$h = \sqrt{s^2 - \overline{SB}^2} = \sqrt{s^2 - \frac{3}{9}s^2} = \sqrt{\frac{6}{9}s^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}s \approx 0.8165s$$

Lösung zu A14 ex-abstand-R3

(a) Man stelle sich einen Quader vor, dessen «linke untere hintere» Ecke der Punkt U ist und dessen «rechte obere vordere» Ecke der Punkt P ist und dessen Wände parallel zu den drei von den Koordinatenachsen aufgespannten Ebenen sind (also x-y-Ebene, x-z-Ebene bzw. y-z-Ebene); drei der Wände sind Teil der Koordinatenebenen. Alternativ könnte man verlangen, dass alle Kanten parallel zu den Koordinatenachsen sind.

Dieser Quader hat die Abmessungen $3 \times 4 \times 12$.

Die gesuchte Länge $\overline{UP}$ ist die Länge der Raumdiagonalen. Wie in Aufgabe A12 ergibt sich

$$\overline{UP} = \sqrt{3^2+4^2+12^2} = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$$

(b) Ähnlich wie in der vorigen Aufgabe betrachte man einen Quader, der die beiden Punkte P und Q als «räumlich gegenüberliegende» Eckpunkte hat und dessen Seiten parallel zu den Koordinatenebenen sind. Dieser Quader hat die Abmessungen $2 \times 3 \times 4$, denn $|x_P - x_Q| = |3-1| = 2$ und $|y_P - y_Q| = |4-7| = 3$ und $|z_P - z_Q| = |12-8| = 4$.

Die gesuchte Länge ist die Länge der Raumdiagonalen, deren Länge wir wie in der vorherigen Teilaufgabe berechnen können: $\overline{PQ} = \sqrt{2^2+3^2+4^2} = \sqrt{29}$

(c) $\overline{PQ} = \sqrt{|x_P - x_Q|^2 + |y_P - y_Q|^2 + |z_P - z_Q|^2} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}$

Lösung zu A15 ex-pythagoras-umkehrung-leicht

(a) $a^2 = b^2 = 9 + 16 = 25 = c^2$. Also ist das Dreieck rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C.

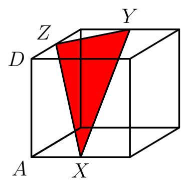
(b) $a^2 + b^2 = 25 + 144 = 169 = c^2$. Also ist das Dreieck rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C.

(c) $a = 17$, $b = 15$, $c = 8$. Hier gilt $c^2 + b^2 = 64 + 225 = 289 = a^2$. Also ist das Dreieck rechtwinklig mit Hypotenuse a, d.h. der rechte Winkel ist bei A.

(d) $a^2 = 16$, $b^2 = 25$, $c^2 = 36$ und keine Summe von zweien dieser Quadrate ist das dritte Quadrat. Also ist das Dreieck nicht rechtwinklig. Einfacher: Es genügt zu testen, dass die Summe der beiden kleineren Quadrate nicht das grösste Quadrat ist: $16 + 25 = 41 \neq 36$.

Lösung zu A16 ex-pythagoras-umkehrung

Mit Pythagoras berechnet man:



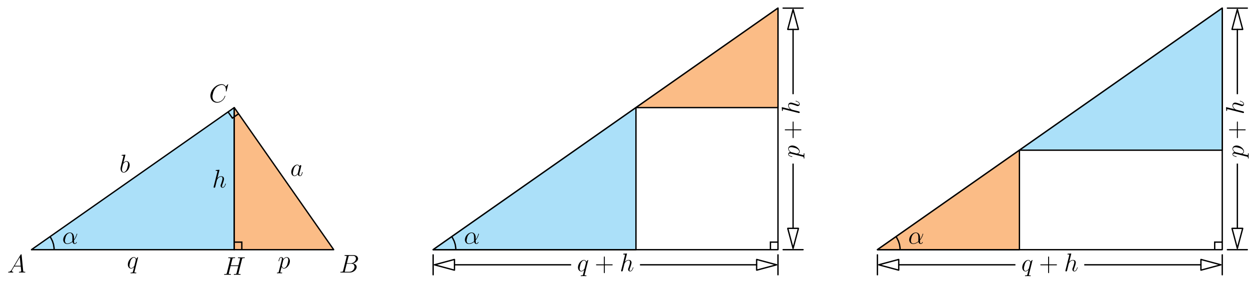
$$\begin{aligned}
\overline{XY}^2 &= a^2 + a^2 = 2a^2 \\
\overline{YZ}^2 &= \left(\tfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{a}{2}\right)^2 = 2\tfrac{a^2}{4} = \tfrac{a^2}{2} \\
\overline{XZ}^2 &= \overline{AX}^2 + \overline{AZ}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DZ}^2 = \left(\tfrac{a}{2}\right)^2 + a^2 + \left(\tfrac{a}{2}\right)^2 = 3\tfrac{a^2}{2}
\end{aligned}$$

Wir vermuten auf Grund der Zeichnung, dass das Dreieck XYZ bei Z einen rechten Winkel hat. Wegen

$$\overline{XZ}^2 + \overline{YZ}^2 = 3\tfrac{a^2}{2} + \tfrac{a^2}{2} = 4\tfrac{a^2}{2} = 2a^2 = \overline{XY}^2$$

stimmt unsere Vermutung nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras.

Lösung zu A17 ex-beweis-hoehensatz-durch-zerlegung



In der ersten Zeile ist die Zerlegung des rechtwinkligen Ausgangsdreiecks durch Zerschneiden entlang der Höhe in zwei rechtwinklige Teildreiecke dargestellt. Nun dreht man des gelbe Dreieck und legt es wie in der zweiten Zeile gezeigt einmal oberhalb und einmal unterhalb an das rote Dreieck. Zusammen mit den grün dargestellten Flächen ergeben sich zwei grosse Dreiecke (es handelt sich wirklich um Dreiecke, denn am Übergang vom roten zum gelben Dreieck entsteht kein Knick, da sich die drei Winkel dort jeweils zu 180° ergänzen). Diese beiden grossen Dreiecke sind per Konstruktion deckungsgleich, haben also insbesondere dieselbe Fläche. Also gilt

$$\begin{aligned}
h^2 &= (\text{Fläche grünes Quadrat}) = (\text{Fläche grosses Dreieck}) - (\text{Fläche gelbes Dreieck}) - (\text{Fläche gelbes Dreieck}) \\
&= (\text{Fläche grünes Rechteck}) = pq
\end{aligned}$$

Dies ist der Höhensatz!

Lösung zu A18 ex-drei-mittelwerte-geometrisch

(a) $m_a = \overline{MQ} = \frac{a+b}{2}$ (da Radius des Thaleskreises)

(b) Berechnung von $m_g = \overline{PQ}$ mit dem Höhensatz: Wegen des Thaleskreises ist das Dreieck XYQ rechtwinklig. Somit dürfen wir den Höhensatz anwenden und erhalten $m_\mathrm{g}^2 = \overline{PQ}^2 = ab$ bzw. per Wurzelziehen $m_\mathrm{g} = \overline{PQ} = \sqrt{ab}$.

Berechnung von $m_\mathrm{g} = \overline{PQ}$ mit dem Satz des Pythagoras: Im rechtwinkligen Dreieck MPQ sind bekannt $m_\mathrm{a} = \overline{MQ} = \frac{a+b}{2}$ und $\overline{MP} = \overline{MY} - b = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a+b-2b}{2} = \frac{a-b}{2}$. Pythagoras liefert

$$m_\mathrm{g} = \overline{PQ} = \sqrt{m_\mathrm{a}^2 - \overline{MP}^2} = \sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2}{4} - \frac{a^2-2ab+b^2}{4}} = \sqrt{\frac{4ab}{4}} = \sqrt{ab}$$

(c) Der Kathetensatz für das Dreick MPQ liefert (mit den bereits berechneten Grössen)

$$m_\mathrm{h} \cdot m_\mathrm{a} = m_\mathrm{g}^2$$
$$m_\mathrm{h} = \frac{m_\mathrm{g}^2}{m_\mathrm{a}} = \frac{\sqrt{ab}^2}{\frac{a+b}{2}} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Lösung zu A19 ex-pythagoras-angelikas-sammlung

(a) a) Katheten mit Länge 3 und 5, dann ist das Hypotenusenquadrat die Lösung
b) Kathete mit Länge 3, Hypotenuse mit Länge 5, dann ist das andere Kathetenquadrat die Lösung

(b) Flächenverwandlung Rechteck → Quadrat (z.B. mit Hilfe des Höhensatzes, wobei ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenusenabschnitt 3 und a) $\frac{3}{2}$, b) 6 und c) 9 zu konstruieren ist. Die Höhe ist dann die gesuchte Quadratseite).

(c) a) z.B. $5 = 1^2 + 2^2$ oder $5 = 3^2 - 2^2$ oder $5 = 1 \cdot 5$. b) $27 = 6^2 - 3^2$ oder $5^2 + 1^2 + 1^2$ oder $27 = 3 \cdot 9$.

(d) 13.9 cm (Halbe Diagonale im Rechteck, zu berechnen mit dem Satz von Pythagoras).

(e) 35.7 km. Sei M der Erdmittelpunkt, L die Spitze des Leuchtturms, T der Berührungspunkt der Tangente durch L an $k(M, r_e)$. Im $\triangle MLT$ gilt: $\overline{LT}^2 = \overline{ML}^2 - \overline{MT}^2 = (r_e + l)^2 - r_e^2$.

(f) Alle Angaben in km. Erdradius $r = 6370$, Distanz $d = 12.2$. Die gesuchte Tiefe ist $r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} \approx 0.0029207$. Also knapp 3m.

(g) maximal 2.32 m. Entscheidend ist die Rechtecksdiagonale bei Schrank. Diese darf höchstens gleich lang wie der Raum hoch sein.

(h) $s_a = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} = \sqrt{109} = 10.44$, $s_b = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}} = \sqrt{61} = 7.81$. Die Schwerlinien sind Hypotenusen in rechtwinkligen Dreiecken!
$s_c = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \frac{\sqrt{136}}{2} = 5.83$ C liegt auf dem Thaleskreis und damit ist s_c ein Radius. Das gilt natürlich nur im rechtwinkligen Dreieck!

(i) $a = 39$ $b = 25$ oder umgekehrt. Seien H der Höhenfusspunkt und M_c die Seitenmitte von c.

Erster Fall, H liegt näher bei A als M_c: HM_c ist Kathete im $\triangle HM_cC$. $\overline{HM_c} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$. Damit ist $\overline{HA} = \frac{c}{2} - \overline{HM_c} = 28 - 8 = 20$. b ist Hypotenuse im $\triangle AHC$. $b = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$. a ist Hypotenuse im $\triangle HBC$. $a = \sqrt{15^2 + 36^2} = 39$.

Zweiter Fall, M_c liegt näher bei A als H: Ähnlich wir oben erhält man $a = 25$ und $b = 39$.

(j) Die Höhe jeder der vier Seiten der Pyramide beträgt $h = \sqrt{21.6^2 + (\frac{34.2}{2})^2} \approx 27.54$ m. Die Fläche beträgt deswegen $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 34.2 \cdot h \approx 1884.38\ \mathrm{m}^2$

(k) a) z.B. $61 = 6^2 + 5^2$ b) z.B. $153 = 12^2 + 3^2$ c) $7 = 4^2 - 3^2$

(l) Die Distanz zweier Punkte kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden (um zum Beispiel $\overline{AB}$ zu berechnen, verwende man ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse $[AB]$ und Katheten parallel zu den Koordinatenachsen; die Längen dieser Katheten erhält man sofort aus den Koordinaten der Punkte, so dass man $\overline{AB}$ mit Pythagoras berechnen kann). Berechnet man so die Längen der drei Dreiecksseiten, so stellt man fest, dass die Summe der Quadrate von zweien die dritte ergeben; damit ist das Dreieck rechtwinklig. Genauer liegt der rechte Winkel bei A (gegenüber der längsten Dreiecksseite).

(m) rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C, Fläche 20.

(n) Dreieck in ein flächengleiches Rechteck umwandeln (etwa per Scherung, so dass ein rechter Winkel entsteht, dann zum Rechteck ergänzen, dann dieses halbieren). Dann Höhen- oder Kathetensatz anwenden.

(o) Höhen- oder Kathetensatz anwenden

(p) (i) 17.85 km (Lösung analog zu Aufgabe (e)). (ii) 37.39 km (Lösung ganz ähnlich zu Aufgabe (f)).

Lösung zu A20 ex-tabelle-pythagoras-etc

Die Formeln für die erste Zeile findet man in der Lösung von Aufgabe A21.
Für die zweite Zeile verwende man Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck $\triangle HBC$: Es gilt $a^2 = p^2 + h^2$. Dann kennt man p und kann wie in der ersten Zeile alles ausrechnen.
Dritte Zeile und vierte Zeile: Verwende $c = p + q$ und berechne dann mit dem Kathetensatz a und b etc.

a	b	c	p	q	h	F
3	4	5	$\frac{9}{5} = 1.8$	$\frac{16}{5} = 3.2$	$\frac{12}{5} = 2.4$	6
13	31.2	33.8	5	28.8	12	202.8
15	20	25	9	16	12	150
$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$	$\sqrt{56} = 2\sqrt{14}$	8	1	7	$\sqrt{7}$	$4\sqrt{7}$

Bemerkung: Die Zahlen in der vorletzten Zeile gehören zu dem kleinsten rechtwinkligen Dreieck, bei dem all diese Zahlen ganzzahlig sind. Es entsteht aus dem Dreieck in der ersten Zeile durch Streckung um den Faktor $c = 5$ (wobei sich die Fläche um den Faktor $5^2 = 25$ ändert).

Lösung zu A21 ex-umkehrformeln

a) $\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$. Die doppelte Dreiecksfläche ist $ab = ch$ und daraus $h = \frac{ab}{c}$, eingesetzt für c: $\boxed{h = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.
Kathetensatz: $cp = a^2$ also $p = \frac{a^2}{c}$, eingesetzt für c: $\boxed{p = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}}$. Entsprechend $\boxed{q = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.

b) $\boxed{h = \sqrt{a^2 - p^2}}$, Kathetensatz $cp = a^2$ also $\boxed{c = \frac{a^2}{p}}$. Aus $p+q = c$ ergibt sich $q = c-p$, also $\boxed{q = \frac{a^2}{p} - p}$.
Für b bieten sich jetzt viele Wege an, z.B. $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, eingesetzt für c: $\boxed{b = \sqrt{\frac{a^4}{p^2} - a^2}}$. Hinweis: Die letzte Formel lässt sich zu $b = a\frac{h}{p}$ vereinfachen.

c) $\boxed{h = \sqrt{pq}}$ (dies bedeutet, dass die Höhe h das *geometrische Mittel* der beiden Hypotenusenabschnitte p und q ist; im Englischen heisst der Höhensatz deswegen *geometric mean theorem*). $\boxed{c = p + q}$. $a = \sqrt{h^2 + p^2}$, eingesetzt für h: $\boxed{a = \sqrt{pq + p^2}}$, entsprechend $\boxed{b = \sqrt{pq + q^2}}$.

d) $\boxed{q = c - p}$. Aus dem Höhensatz ergibt sich $\boxed{h = \sqrt{p(c-p)}}$, aus dem Kathetensatz $\boxed{a = \sqrt{cp}}$ und $\boxed{b = \sqrt{c(c-p)}}$

e) Kurzfassung: Der Leser überlege sich, dass $(c+q)^2 = 4b^2 + p^2$ gilt (linke Seite ausmultiplizieren; $cq = b^2$; Pythagoras in den drei rechtwinkligen Dreiecken). Damit kann man $x := c + q$ berechnen. Wegen $x + p = c + q + p = 2c$ erhält man c und dann $q = x - c$. Der Rest ist einfach.
Langfassung: Die folgende Rechnung zeigt $(c+q)^2 = 4b^2 + p^2$:

$$\begin{aligned}(c+q)^2 = c^2 + 2cq + q^2 &\overset{\text{Pythagoras}}{=} a^2 + b^2 + 2cq + q^2 \overset{\text{Pythagoras und Kathetensatz}}{=} p^2 + h^2 + b^2 + 2b^2 + q^2 \\ &= p^2 + 3b^2 + h^2 + q^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=} p^2 + 3b^2 + b^2 = 4b^2 + p^2\end{aligned}$$

Somit gilt $c + q = \sqrt{4b^2 + p^2}$. Addition von p auf beiden Seiten liefert wegen $c = q + p$ die Gleichung

$$2c = c + q + p = \sqrt{4b^2 + p^2} + p$$

und dann per Division durch 2 den gesuchten Ausdruck für c in Abhängigkeit von p und b:

$$\boxed{c = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4b^2 + p^2} + p\right)}$$

Subtraktion von p auf beiden Seiten liefert $\boxed{q} = c - p = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4b^2 + p^2} + p\right) - p = \boxed{\frac{1}{2}\left(\sqrt{4b^2 + p^2} - p\right)}$.
Schliesslich liefern Höhen- und Kathetensatz die (relativ komplizierten) Formeln

$$h = \sqrt{pq} = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\sqrt{4b^2 + p^2} - p\right)} \quad \text{bzw.} \quad a = \sqrt{cp} = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\sqrt{4b^2 + p^2} + p\right)}$$

Wie meist, gibt es auch andere Lösungswege – beispielsweise kann man a auch per $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ ausrechnen (und kommt mit etwas Rechnen auf dasselbe Ergebnis).

Lösung zu A22 ex-pythagoras-satzfamilie-lueckentext

In jedem $\boxed{\text{rechtwinkligen}}$ Dreieck gilt

- laut dem Satz von Pythagoras: $\boxed{\text{die Summe}}$ $\boxed{\text{der Quadrate}}$ $\boxed{\text{der Katheten}}$ ist so gross wie $\boxed{\text{das Quadrat}}$ $\boxed{\text{der Hypotenuse}}$
- laut dem Kathetensatz: $\boxed{\text{das Produkt}}$ $\boxed{\text{von Hypotenuse}}$ und $\boxed{\text{Hypotenusenabschnitt}}$ ist so gross wie $\boxed{\text{das Quadrat}}$ $\boxed{\text{der zugehörigen Kathete}}$
- laut dem Höhensatz: $\boxed{\text{das Produkt}}$ $\boxed{\text{der beiden Hypotenusenabschnitte}}$ ist so gross wie $\boxed{\text{das Quadrat}}$ $\boxed{\text{der Höhe}}$

Lösung zu A23 ex-rechtwinkliges-dreieck-alles-ganzzahlig

Im rechtwinkligen 3-4-5-Dreieck gelten

$$\begin{aligned}
a &= 3 \\
b &= 4 \\
c &= 5 \\
p &= \frac{a^2}{c} = \frac{9}{5} && \text{nach dem Kathetensatz} \\
q &= \frac{b^2}{c} = \frac{16}{5} && \text{nach dem Kathetensatz} \\
h &= \sqrt{pq} = \sqrt{9 \cdot 1625} = \frac{12}{5} && \text{nach dem Höhensatz}
\end{aligned}$$

Alternativ kann man h auch aus «Fläche auf zwei Arten berechnen» bestimmen: $h = \frac{ab}{c} = \frac{12}{5}$.

Daraus folgt: Wenn man dieses Dreieck mit dem Faktor 5 streckt, werden alle gewünschten Strecken ganzzahlig:

$$\begin{aligned} a' &= 15 \\ b' &= 20 \\ c' &= 25 \\ p' &= 9 \\ q' &= 16 \\ h' &= 12 \end{aligned}$$

Lösung zu A24 ex-satzgruppe-pythagoras-figuren

Die Bestimmungen von r und s sind unabhängig voneinander:

- Bestimmung von r:

  Im rechtwinkligen Dreieck $M_{AB}BC$ gilt $\overline{M_{AB}B} = \sqrt{a^2 - h_c^2} = \sqrt{80-64} = \sqrt{16} = 4$. Die andere Hälfte der Strecke $[AB]$ ist genauso lang, d. h. $\overline{M_{AB}A} = 4$.

  Im $\triangle M_{AB}M_1A$ gilt: $r^2 = \overline{M_{AB}A}^2 + (h_c - r)^2$. Eingesetzt:

  $$\begin{aligned} r^2 &= 4^2 + (8-r)^2 \\ r^2 &= 16 + 8^2 - 2\cdot 8 \cdot r + r^2 && \mid -r^2 \\ 0 &= 80 - 16r && \mid +16r \\ 16r &= 80 && \mid :16 \\ r &= 5 \end{aligned}$$

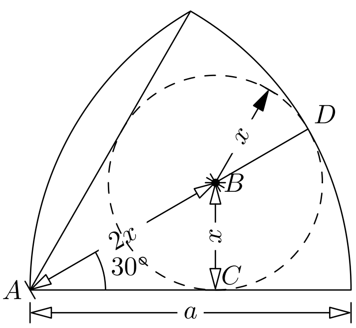
- Bestimmung von s:

  Der Punkt D liegt auf dem Thaleskreis über $M_{AB}C$. Also ist $[M_{AB}D]$ die Höhe im rechtwinkligen $\triangle AM_{AB}C$ und s ist der Hypotenusenabschnitt, der «zur Kathete h_c gehört». Der Kathetensatz besagt: $a \cdot s = h_c^2$ und damit ist $s = \frac{h_c^2}{a} = \frac{64}{4\sqrt{5}} = \frac{16}{\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{5}$.

  Alternativ kann man s auch mit dem Sekanten-Tangenten-Satz (Aufgabe 52 im Skript zu Ähnlichkeit; Aufgabe refex-sekantentangenten-sekanten-sehnensatz) berechnen: $\overline{AD} \cdot \overline{AC} = \overline{AM_{AB}}^2$ d.h. konkret $(a - s) \cdot a = 4^2$, also $a^2 - as = 16$, also $s = \frac{a^2-16}{a} = \frac{80-16}{4\sqrt{5}} = \frac{64}{4\sqrt{5}} \overset{\text{siehe oben}}{=} \frac{16\sqrt{5}}{5}$.

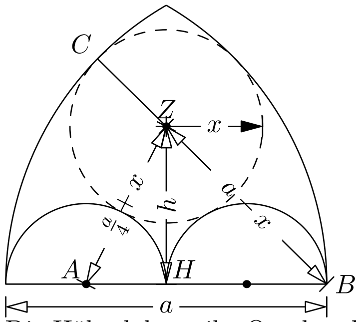
Lösung zu A25 ex-pythagoras-fuellkreise

a)



$\triangle ABC$ ist ein 30°-60° Dreieck und damit ist $\overline{AB} = 2\overline{CB}$. Weiter ist $\overline{AD} = a = 3x$ und damit ist $x = \frac{1}{3}a$.

b)



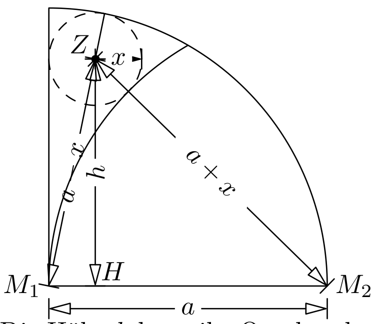
Die Höhe h bzw. ihr Quadrat lässt sich auf zwei Arten mit Pythagoras berechnen, einmal im $\triangle AHZ$ und einmal im $\triangle HBZ$ (beachte $\overline{BC} = a$ und deswegen $\overline{BZ} = a - x$).

$$h^2 = \left(x + \frac{a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2$$
$$h^2 = (a-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke liefert

$$\begin{aligned}
\left(x + \frac{a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 &= (a-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 & \\
x^2 + 2x\frac{a}{4} + \frac{a^2}{16} - \frac{a^2}{16} &= a^2 - 2ax + x^2 - \frac{a^2}{4} & \mid -x^2 \\
\frac{ax}{2} &= \frac{3a^2}{4} - 2ax & \mid +\frac{4ax}{2} \\
\frac{5ax}{2} &= \frac{3a^2}{4} & \mid \cdot \frac{2}{5a} \\
x &= \frac{3a}{10} &
\end{aligned}$$

c)



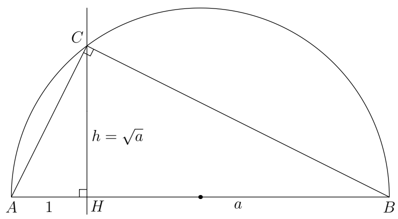
Die Höhe h bzw. ihr Quadrat kann auf zwei Arten mit Pythagoras berechnet werden, einmal im $\triangle M_1HZ$ und einmal im $\triangle HM_2Z$:

$$h^2 = (a-x)^2 - x^2$$
$$h^2 = (a+x)^2 - (a-x)^2$$

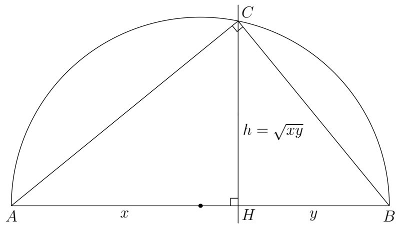
Gleichsetzen liefert

$$\begin{aligned}
(a-x)^2 - x^2 &= (a+x)^2 - (a-x)^2 & \\
a^2 - 2ax &= 4ax & \mid +2ax \\
a^2 &= 6ax & \mid : 6a \\
\frac{a}{6} &= x &
\end{aligned}$$

Lösung zu A26 ex-geometrisches-wurzelziehen-und-multiplizieren



(a) Geometrisches Wurzelziehen: Trage von einem beliebigen Punkt H auf einer beliebigen Geraden die Strecken 1 und a in beide Richtungen ab wie in der Zeichnung. Errichte in H die Senkrechte zu der Geraden und schneide diese mit dem Thaleskreis über $[AB]$. Nenne den Schnittpunkt C. Das Dreieck $\triangle ABC$ ist nach dem Satz von Thales rechtwinklig mit Hypotenusenabschnitten a und 1. Nach dem Höhensatz gilt $h^2 = a \cdot 1 = a$, also $h = \sqrt{a}$.



(b) Rechteck zu Quadrat: Ähnlich wie in der vorigen Teilaufgabe konstruiert man ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenusenabschnitten x und y. Nach dem Höhensatz gilt $h = \sqrt{xy}$. Also hat das Quadrat mit Seitenlänge h die Fläche $h^2 = xy$ wie gewünscht.

(c) Quadrat zu Rechteck: Man verwendet dieselbe Zeichnung wie in der vorigen Teilaufgabe (benötigt aber den Thales-Kreis gar nicht), wobei $h = s$ die Seitenlänge des Quadrats ist. Von dieser trägt man an einem Ende rechtwinklig die Seite x ab und erhält so das Dreieck $\triangle AHC$. Die Senkrechte zu (AC) durch C schneidet die Gerade (AH) in einem Punkt, den wir B nennen. Dann ist das Dreick $\triangle ABC$ rechtwinklig mit Höhe h und Hypotenusenabschnitten x und $[HB]$. Dieser zweite Hypotenusenabschnitt $y := [HB]$ ist die gesuchte zweite Rechteckseite, denn es gilt $xy = h^2 = s^2$.

(d) Geometrisches Multiplizieren: Mit Teilaufgabe (b) konstruiert man ein Quadrat mit Fläche xy. Aus diesem konstruiert man mit Teilaufgabe (c) ein flächengleiches Rechteck mit vorgegebener Seite der Länge 1. Die andere Seite hat dann die Länge xy.

Lösung zu A27 ex-flaechenverwandlung-mit-kathetensatz

(a) Nimm die längere der beiden Rechtecksseiten (nenne sie c) und trage auf ihr „von rechts“ die kürzere Rechtecksseite ab (nenne diese p). Mit Hilfe des Thaleskreis über c konstruiert man leicht ein rechtwinkliges Dreieck, dessen einer Hypotenusenabschnitt p ist. Dann gilt nach dem Kathetensatz $a^2 = cp$. Also ist a die Seitenlänge des gesuchten Quadrats.

(b) Im Wesentlichen geht das umgekehrt, jedoch muss man zwei Fälle unterscheiden:

Fall 1, $x > s$: Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks mit $a := s$ und $c := x$: Trage die Strecke $c = [AB]$ an beliebiger Stelle ab. Der Thaleskreis über dieser Strecke ist der 1.g.O.f. C. Der Kreis $k(B, a)$ ist der 2.g.O.f. C. Jeder der beiden Schnittpunkte dieser beiden Kreise ist ein möglicher Punkt C. Der Höhenfusspunkt auf c kann nun konstruiert werden, und so erhält man die beiden Hypotenusenabschnitte p und q. Dann gilt $xp = cp = a^2 = s^2$. Also ist p die gesuchte zweite Rechtecksseite.

Fall 2, $x < s$: Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks mit $a := s$ und $p := x$:

Trage die Strecke $a = [BC]$ an beliebiger Stelle ab. Der Thaleskreis über dieser Strecke ist der 1.g.O.f. H. Der 2.g.O.f H ist der Kreis $k(B, p)$. Nenne einen der beiden Schnittpunkt dieser beiden Kreise H. Das Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C kann nun ergänzt werden (nutze den rechten Winkel bei C). Dann gilt $cx = cp = a^2 = s^2$. Also ist c die gesuchte zweite Rechtecksseite.

Lösung zu A28 ex-heron-anwenden

(a) Es gilt $s = \frac{1}{2}(3 + 7 + 8) = 9$ und damit nach Herons Formel

$$F = \sqrt{9 \cdot 6 \cdot 2} = \sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3}$$

Wegen $F = \frac{1}{2}(\text{Grundseite}) \cdot (\text{zugehörige Höhe})$ folgt Höhe $= \frac{2F}{\text{Grundseite}}$. Also

$$\begin{aligned} h_a &= \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \\ h_b &= \frac{12}{7}\sqrt{3} \\ h_c &= \frac{12\sqrt{3}}{8} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

(b) Jede Kathete ist eine Höhe über der anderen Kathete. Also hat das 3-4-5-Dreieck die Fläche $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$.
Mit Heron: $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(3+4+5) = 6$, also Fläche

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} \\ &= \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \sqrt{36} \\ &= 6 \end{aligned}$$

(c) Klassisch: Die Höhe beträgt $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ (nach Pythagoras). Also ist die Fläche

$$A = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Heron: Es gilt $s = \frac{1}{2}(a+a+a) = \frac{3}{2}a$, also $s-a = s-b = s-c = \frac{1}{2}a$, also

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}a \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a} \\ &= \sqrt{\frac{3}{16}a^4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \end{aligned}$$

Beide Resultate stimmen netterweise überein.

(d) Seien c die Hypotenuse und $a = b$ die Katheten.
Klassisch:

$$A = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a^2$$

Heron: $c = \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$, also

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(2a+\sqrt{2}a) = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a \\ s-a = s-b &= \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ s-c &= \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\
&= \sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \cdot \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot a} \\
&= \sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot a^4} \\
&= \sqrt{\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot a^4} \\
&= \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot a^4} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot a^4} \\
&= \frac{1}{2}a^2
\end{aligned}$$

Beide Resultate stimmen netterweise überein.

Lösung zu A29 ex-heron-beweis-lesen

Zur Zusatzfrage: Die Formulierung «Sie teilt die Seite c in die beiden Abschnitt x und y.» ist nicht mehr korrekt. Der Beweis ist wie folgt anzupassen: Sei F der Fusspunkt der Höhe $h = h_c$. Setze denn $x = \overline{BF}$ und $y = \overline{AF}$ (wobei A und B die üblichen Eckpunktbezeichnungen sind).

Der Rest des Beweises funktioniert dann analog, denn man kann Pythagoras wiederum auf die beiden offensichtliche rechtwinkligen Dreiecke anwenden.

Lösung zu A30 ex-dimensionskontrolle

Lösung zu A31 ex-dimensionsbestimmung

Lösung zu A32 ex-pythagoreische-tripel-c-gleich-b-plus-eins-neu

(a) selbst

(b) Da a ungerade und ≥ 3 ist, ist a^2 ungerade und ≥ 9, also $a^2 - 1$ gerade und ≥ 8, also ist b eine natürliche Zahl ≥ 2. (Natürlich ist dann auch $b + 1$ eine natürliche Zahl.)

Zu zeigen ist $a^2 + b^2 = (b + 1)^2$. Wir berechnen zuerst die linke Seite

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= a^2 + \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 \\
&= a^2 + \frac{a^4 - 2a^2 + 1}{4} \\
&= \frac{4a^2 + a^4 - 2a^2 + 1}{4} \\
&= \frac{a^4 + 2a^2 + 1}{4}
\end{aligned}$$

und dann die rechte Seite

$$\begin{aligned}(b+1)^2 &= \left(\frac{a^2-1}{2}+1\right)^2\\ &= \left(\frac{a^2-1+2}{2}\right)^2\\ &= \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2\\ &= \frac{a^4+2a^2+1}{4}\end{aligned}$$

Beide Male kommt dasselbe heraus. Also ist $(a, b, b+1)$ ein pythagoreisches Tripel.

Zusatz: Sei (a, b, c) ein beliebiges pythagoreisches Tripel mit $c = b+1$. Dann gilt

$$a^2 + b^2 = c^2 = (b+1)^2 = b^2 + 2b + 1$$

Also folgt $a^2 = 2b+1$, daraus $2b = a^2 - 1$ und somit $b = \frac{a^2-1}{2}$.

Lösung zu A33 ex-pythagoreische-tripel-neu

(a) Offensichtlich sind $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ und $c = m^2 + n^2$ unter der Annahme, dass $m > n > 0$ natürliche Zahlen sind, positive natürliche Zahlen.

Zu zeigen bleibt also $a^2 + b^2 = c^2$. Wir berechen beide Seiten dieser Gleichung: Linke Seite:

$$a^2 + b^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4$$

Rechte Seite:

$$c^2 = (m^2 + n^2)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4$$

Beide Seiten stimmen also überein, d. h. (a, b, c) ist ein pythagoreisches Tripel.

(b) selbst

(c) Beachte, dass $(4, 3, 5)$ nicht von unserer Formel erzeugt wird, denn 3 ist ungerade und deswegen nie von der Form $2mn$.

Da pythagoreische Tripel zu $(m, n) = (3, 1)$ ist aber

$$(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2) = (8, 6, 10)$$

Dieses ist proportional zu $(4, 3, 5)$.

Lösung zu A34 ex-pythagoreische-tripel-c-gleich-b-plus-eins

(a) selbst

(b) Da a ungerade und ≥ 3 ist, ist a^2 ungerade und ≥ 9, also $a^2 - 1$ gerade und ≥ 8, also ist b eine natürliche Zahl ≥ 2. (Natürlich ist dann auch $b+1$ eine natürliche Zahl.)

Zu zeigen ist $a^2 + b^2 = (b+1)^2$. Wir berechnen zuerst die linke Seite

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= a^2 + \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2\\ &= a^2 + \frac{a^4-2a^2+1}{4}\\ &= \frac{4a^2+a^4-2a^2+1}{4}\\ &= \frac{a^4+2a^2+1}{4}\end{aligned}$$

und dann die rechte Seite

$$\begin{aligned}(b+1)^2 &= \left(\frac{a^2-1}{2}+1\right)^2\\ &= \left(\frac{a^2-1+2}{2}\right)^2\\ &= \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2\\ &= \frac{a^4+2a^2+1}{4}\end{aligned}$$

Beide Male kommt dasselbe heraus. Also ist $(a, b, b+1)$ ein pythagoreisches Tripel.

- Das Tripel ist primitiv, denn $\operatorname{ggT}(b, b+1) = 1$ und somit erst recht $\operatorname{ggT}(a, b, b+1) = 1$.
- Sei (a, b, c) ein beliebiges pythagoreisches Tripel mit $c = b+1$. Dann gilt

  $$a^2+b^2 = c^2 = (b+1)^2 = b^2+2b+1$$

  Also folgt $a^2 = 2b+1$, daraus $2b = a^2-1$ und somit $b = \frac{a^2-1}{2}$.

Lösung zu A35 ex-pythagoreische-tripel

(a) Offensichtlich sind $a = m^2-n^2$, $b = 2mn$ und $c = m^2+n^2$ unter der Annahme, dass $m > n > 0$ natürliche Zahlen sind, positive natürliche Zahlen.

Zu zeigen bleibt also $a^2+b^2 = c^2$. Wir berechen beide Seiten dieser Gleichung: Linke Seite:

$$a^2+b^2 = (m^2-n^2)^2+(2mn)^2 = m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2 = m^4+2m^2n^2+n^4$$

Rechte Seite:

$$c^2 = (m^2+n^2)^2 = m^4+2m^2n^2+n^4$$

Beide Seiten stimmen also überein, d. h. (a, b, c) ist ein pythagoreisches Tripel.

(b) selbst