

Lernziele

- Gruppe A – «Racial Profiling»: $P(A|K)$ zu $P(K|A)$ umrechnen können. Die zentrale Annahme wird erkannt und die Abhängigkeit der Aussagen von dieser zentralen Annahme ist klar.
- Gruppe B – «Pränatale Diagnostik». Vierfeldertafel und unterschiedliche Baumreihenfolgen anfertigen können und Problematik von falsch-positiven Diagnosen erklären können.
- Gruppe C – «Massenscreening». Zentrales Lernziel: Relatives und absolutes Risiko, resp. Risikoreduktion und Prävalenz beschreiben und berechnen können.

1 Racial Profiling

Auftrag: Lesen Sie den nachfolgenden Text (Kapitel 12.3 aus «Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik von R. Spielmann») durch und beantworten Sie die Fragen unten.

1.1 Fragen

- Welches ist die zentrale Annahme im Text im Argumentarium «racial profiling»?
- Recherchieren Sie die Wahrscheinlichkeit $P(K|A)$: Was sagt das Bundesamt für Statistik dazu?
- Berechnen Sie und interpretieren Sie $P(K|A^c)$ mit den Daten des Artikels. Tipp: Beachten Sie $P(A|K) + P(A^c|K) = 1$.

12.3 Pauschalurteile und Begriffsverwirrungen

Versuche zur Stigmatisierung von Gruppen aufgrund äußerlicher Merkmale wie Herkunft, Rassenzugehörigkeit oder Religion bergen einen beachtlichen sozialen Sprengstoff. Wie vom Psychologen Key Sun [81] bemerkt wurde, basieren sie auf einer Argumentationskette, die außer dem Simpson-Paradoxon noch einen weiteren logischen Fehler enthält. Er beruht auf der Verwechslung von verschiedenen bedingten Wahrscheinlichkeiten.

Betrachten wir die Schweiz, wo die Zahlen besonders aussagekräftig sind. Im Jahre 2014 lag dort der Ausländeranteil an der Gesamtbevölkerung bei 24,3 %. Dennoch wurden 56 % der Straftaten von Ausländern begangen. Was läge nun näher, als die Ausländer von vornherein zur Verhütung oder Aufklärung von Straftaten stärker ins Visier zu nehmen?

Dem Konzept des ethnischen Profilings liegt der Ansatz zugrunde, dass auch ein zunächst unauffällig erscheinender Ausländer mit wesentlich höherer Wahrscheinlichkeit kriminell ist. Die Staatsgewalt überprüft dann gezielt gewisse Personen ohne konkrete Verdachtsmomente. Praktiziert wird es meist durch willkürliche Polizeikontrollen auf Straßen, in öffentlichen Verkehrsmitteln oder an Grenzen. Willkürliche Kontrolle wegen der Zugehörigkeit zu gewissen Religionen fällt in dasselbe Schema.

Bezeichnen wir mit A das Ereignis, dass eine Person ausländischer Herkunft ist. K ist das Ereignis, dass sie straffällig geworden ist, sich aber noch unentdeckt auf freiem Fuß befindet. Ethnisches Profiling setzt voraus, dass die Wahrscheinlichkeit $p(K | A)$ hoch ist. Doch ist sie das tatsächlich?

Die kriminalistische Aufklärungsrate hängt eher von der Art des Verbrechens, nicht aber von der Nationalität des Täters ab. Wir gehen deshalb davon aus, dass der Ausländeranteil bei überführten Tätern genauso hoch ist wie bei den nicht aufgeklärten Fällen. Bei einem Ausländeranteil von 56 % unter den Verurteilten durch Schweizer Gerichte ist demnach

$$p(A | K) \approx 0,56$$

Widerstehen wir der Versuchung, die bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(K | A)$ und $p(A | K)$ einander gleichzusetzen und wenden stattdessen die Formel von Bayes (8.6) an:

$$p(K | A) = \frac{p(A | K) \cdot p(K)}{p(A)}$$

Die Schweiz gehört zu den Ländern mit niedriger Kriminalität. Im Jahre 2014 betrug ihre Gefangenenrate 84 Personen pro 100.000 Einwohner. Die Aufklärungsquote liegt in der Schweiz weit über 20 %, wobei es überwiegend leichtere Delikte wie Diebstahl oder Einbruch sind, die schlechter aufgeklärt werden. Nehmen wir an, dass es insgesamt fünfmal so viele unentdeckte Straftäter gäbe, was sicherlich übertrieben viel ist. Dann wäre

$$p(K) = 5 \cdot 8,4 \cdot 10^{-4}$$

und wir erhalten

$$p(K | A) = \frac{0,56 \cdot 5 \cdot 8,4 \cdot 10^{-4}}{0,243} = 9,68 \cdot 10^{-3}$$

Die Wahrscheinlichkeit, ohne Anhaltspunkte einen Kriminellen unter Ausländern zu finden, liegt in der Schweiz also unter 1 %.

Bei Gleichsetzung der bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(K | A)$ und $p(A | K)$ begeht man exakt denselben Irrtum wie im Beispiel 34 beim Test auf eine seltene Krankheit. Der Fehler lag ebenfalls einigen der früher besprochenen Justizirrtümer zugrunde.

Racial Profiling ist ein effektives Mittel, um einer Minderheit zu demonstrieren, dass sie nicht erwünscht ist. Es verstärkt soziale Spannungen, zerstört das Vertrauen in den Staat und begünstigt die Entstehung von Parallelgesellschaften. Zudem verstößt es klar gegen den Grundsatz der Gleichbehandlung nach dem Gesetz und gilt nach internationalem Recht als rassistische Diskriminierung. Leider wird es dennoch in vielen Ländern praktiziert, wenn auch nur selten darüber gesprochen wird.

In den USA richtet es sich, wenngleich offiziell verboten, hauptsächlich gegen Afroamerikaner und Hispanics. Doch zumindest wird die öffentliche Debatte ehrlich und kritisch geführt. In Deutschland gibt es zwar die Praxis, aber kein eigenes Wort dafür. Äußerlich will man es vermeiden, mit derart anrühigen Methoden in Verbindung gebracht zu werden.⁴ Auch in Schweizer Medien wurde die Problematik lange Zeit kaum thematisiert, bis es erstmals 2016 vor einem Zürcher Gericht zu einer Verhandlung kam.

Sinnvolle Ansätze zur Verbrechensanalyse gehen tiefer. Nimmt man die Vorgeschichte von verurteilten Straftätern genauer unter die Lupe, so findet man je nach Straftat ein ganzes Bündel von Eigenschaften, die einen wesentlich stärkeren Einfluss als die ethnische Herkunft haben. Darunter sind Faktoren wie soziale Bindungen bzw. Ausgrenzung, Erlernen kriminellen Verhaltens, Bildungsweg, Impulsivität, intellektuelle Fähigkeiten oder Defizite, Entwicklungsstörungen, traumatische Erlebnisse in der Kindheit, das Geschlecht und die Zugehörigkeit zu einer bestimmten Gesellschaftsschicht.

Je nach Art der Straftat sind diese Faktoren meist verschieden ausgeprägt, sodass jeder für sich betrachtet wenig Erkenntnis über das kriminelle Potenzial liefert.

⁴ Der berühmteste deutsche Fall ist die Serie der sogenannten Dönermorde von 2000 bis 2006, bei denen die meisten Mordopfer einen türkischen Migrationshintergrund hatten. Die Polizei ermittelte bis 2011 fast ausschließlich gegen Türken. Erst bei der Aufklärung eines anderen Verbrechens stellte sich heraus, dass die Täter aus der deutschen Neonaziszene stammten.

2 Massenscreening

Auftrag: Lesen Sie den Text unten durch, schauen Sie sich das Video (QR und Link unten) ab 29:44 an und beantworten Sie dann die Fragen. Schauen Sie nach Möglichkeit auch den ersten Teil der Dokumentation.



<https://www.nanoo.tv/link/v/zkEZhsoj>

Wir gehen von einer Krankheit aus, an welcher man (unbekannterweise) leidet. Die Wahrscheinlichkeit, an dieser Krankheit zu leiden, sei $P(E)$. E steht dabei für «exposure». Weiter gehen wir von zwei Therapien A und B aus. Beide Therapien geben eine Wahrscheinlichkeit an der Krankheit zu sterben an: Für die Therapie A ist dies $P(A|E)$, für die Therapie B ist dies $P(B|E)$ – die Wahrscheinlichkeit ist offensichtlich bedingt auf die Tatsache, dass man überhaupt an der Krankheit leidet.

Gehen wir also davon aus, dass das Risiko an einer Krankheit mit der bestehenden Therapie A zu sterben, $P(A|E)$ beträgt. Eine neue Therapie verringert dieses Risiko auf $P(B|E)$. Diese «relative Risikoreduktion» ρ , die häufig berichtet wird, ist die relative (prozentuale) Änderung von $P(A|E)$ auf $P(B|E)$. Das heisst, $\frac{P(A|E) - P(B|E)}{P(A|E)} = \rho$. Wenn z.B. $P(A|E) = 5\%$ ist und $P(B|E) = 3\%$ ist, dann ist die relative Risikoreduktion $\rho = 40\%$, die absolute Risikoreduktion beträgt 2% .

Die absolute Risikoreduktion ist die Differenz der beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten, also $P(A|E) - P(B|E)$, die relative Risikoreduktion die relative Differenz dieser gleichen Wahrscheinlichkeiten.

2.1 Fragen

Gehe von einer relativen Risikoreduktion von $\rho = 20\%$ und einem Ausgangsrisiko $P(A|E) = 0.5\%$ aus.

- Berechnen Sie $P(B|E)$.
- Berechnen Sie die absolute Risikoreduktion.
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ resp. $P(B)$, dass eine Person der Bevölkerung an der Krankheit mit Behandlung A resp. B stirbt, wenn
 1. $P(E) = 0.1\%$
 2. $P(E) = 10\%$
 ist?
- Kommentieren Sie das Video bzgl. Brustkrebsscreening und absolutes versus relatives Risiko. Was ist für die Kosten zu bedenken?

2.2 Tipps

- Tipp: Verwenden Sie eine Excel-Tabelle, dass Sie die Werte einfach abspeichern können. Alternativ können Sie auch den Taschenrechner verwenden und die Variablen speichern, so dass Sie nicht alles neu berechnen müssen.
- Versuchen Sie die Fragen theoretisch zu beantworten. Falls dies nicht geht, spielen Sie verschiedene Szenarien mit der Excel-Datei / Taschenrechner durch.

Die Differenz $P(A) - P(B)$ ist also die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person die unter A gestorben wäre, unter B nun überlebt. Geht man wie im Video vom umfassenden Screening aus, kann also die Frage gestellt werden, wie viele Personen gescreent werden müssen, um eine Person zu retten: Dies nennt man die «number needed to treat» und ist offensichtlich $\frac{1}{P(A) - P(B)}$: Man stelle sich vor A sei die Therapie «nichts machen» und B sei die Therapie «Screening für alle» und es betrüge $P(A) = 0.005$ und $P(B) = 0.004$. Das heisst, die Wahrscheinlichkeit durch das neue Verfahren B «gerettet» zu werden, beträgt 0.001 .

3 Pränatale Diagnostik

Auftrag: Arbeiten Sie den nachfolgenden Lerntext durch und beantworten Sie die Fragen in diesem Text. Was würden Sie einer Bekannten raten, die vor der Frage «pränatale Diagnostik» steht?

Auftrag

Lies dir den folgenden Lerntext durch. Darin sind mehrere Beispiele bereits vollständig berechnet. Stelle sicher, dass du die Berechnung nachvollziehen kannst, indem du die Grössen nachrechnest. Vervollständige zusätzlich dazu noch die Lücken bei «Dein Einsatz».

Material: Diese Unterlagen, Taschenrechner, Notizpapier
Zeit: Eine Lektion

Lernziele

- Du kannst die Begriffe Vierfeldertafel, Sensitivität, Spezifität, falsch-positiv und falsch-negativ anhand eines Beispiels erklären.
- Du kannst eine Testsituation auf zwei verschiedene Arten als *absoluten Baum* darstellen (Baum 1 und Baum 2).
- Du kannst eine Testsituation auf zwei verschiedene Arten als *relativen Baum* darstellen (Baum 1 und Baum 2).
- Du kannst einen «Baum 1» in einen «Baum 2» (absolut) umrechnen.
- Du kannst aus einem gegebenen absoluten Baum einen relativen Baum ausrechnen.
- Du kannst den Begriff bedingte Wahrscheinlichkeit anhand eines Beispiels erklären und aufgrund eines gegebenen Baums diese berechnen.

Einführung

Der «Satz von Bayes» ist vermutlich einer der wichtigsten Sätze der Stochastik. Er geht auf den presbyterianischen Pfarrer Thomas Bayes, 1702–1761, zurück. Neben seiner Wichtigkeit für die Stochastik an sich hat er auch Implikationen für – wie z.B. auch in Kahneman (2011) dargelegt – *alle*, die mit Entscheidungen unter Unsicherheit konfrontiert sind: Häufig genannt werden Ärzte und Richter, doch der Satz von Bayes ist genauso wichtig in der Rolle als Konsument, Patient etc.

Als einfachstes Beispiel dient wohl die Frage, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass dich ein Mädchen (Junge) mag, wenn er (sie) dich anlächelt: An diesem Beispiel, sollte klar werden, dass die Frage «Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie mich anlächelt, wenn sie mich mag» nicht die gleiche ist wie «Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie mich mag, wenn sie mich anlächelt».

Mit Fragen wie dieser ist der Satz von Bayes befasst: Wie komme ich von einer Aussage («Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie mich mag, wenn sie mich anlächelt») zur anderen Aussage («Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie mich anlächelt, wenn sie mich mag»).

Anstelle des Beispiels mit dem Mädchen tritt nun der medizinische Test resp. die physiologische Realität. Die Frage die sich in diesem Kontext stellt, ist wie gross die Wahrscheinlichkeit eines positiven Testresultats in Abhängigkeiten des Vorliegens einer Krankheit oder Phänomen. Der Satz von Bayes wird dabei nicht formal bewiesen oder hergeleitet sondern viel mehr intuitiv mit zusammenzählen illustriert.

Notiz

Stochastik ist eine Teildisziplin der Mathematik, die mit den Themen Wahrscheinlichkeit und Statistik befasst ist. Wie so oft klärt die Etymologie die Inhalte: Stochastik geht auf das Altgriechische zurück und kann mit der Kunst des Ratens übersetzt werden

Stochastik von medizinischen Tests

Das Beispiel, das wir zu Illustration heranziehen ist das Folgende: Bei schwangeren Frauen wird häufig routinemässig abgeklärt, ob Trisomie 21 beim ungeborenen Kind vorliegt. Die Abklärung ist üblicherweise mehrstufig, an erster Stelle steht aber ein relativ einfacher Test. In unserem Beispiel wäre die «physiologische Realität» (kurz «Realität»), ob das ungeborene Kind wirklich Trisomie 21 hat (ja/nein) und die Aussage des Tests, ob dieser auffällig (positiv) oder unauffällig (negativ) ist.

Medizinische Tests – Vierfeldertafel

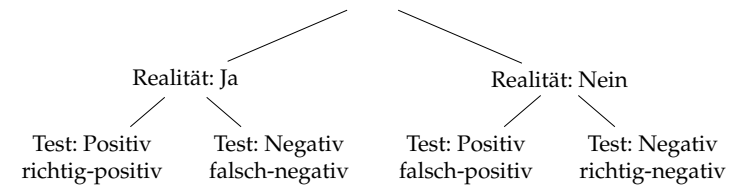
Medizinische Tests sind nicht perfekt: Das heisst, sie können falsch-positiv wie auch falsch-negativ sein. Dazu folgende Tabelle – eine sogenannte Vierfeldertafel – zur Illustration:

		Realität	
		Ja	Nein
Test	Positiv	richtig-positiv	falsch-positiv
	Negativ	falsch-negativ	richtig-negativ

Lesebeispiel: Kommt ein Kind ohne Trisomie 21 (Realität: Nein) zur Welt und der Test war auffällig (Test: positiv) so handelt es sich um einen Fall von *falsch-positiv*.

Dein Einsatz: Kommt ein Kind mit Trisomie 21 (Realität: Ja) zur Welt und der Test war auffällig (Test: positiv) so handelt es sich um einen Fall von _____.

Die obige Tabelle lässt sich nun auch als Baum darstellen:



Notiz

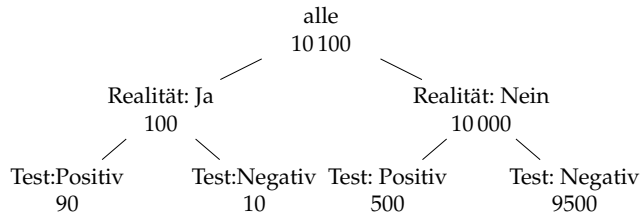
In der Fachwelt spricht man oft von *Sensitivität* (richtig-positiv Rate in Prozent) und *Spezifität* (richtig-negativ Rate in Prozent) eines Tests.

Häufigkeiten: Anzahl in Medizinischen Tests

Zur Illustration nehmen wir an, es gebe insgesamt 10 100 Geburten.

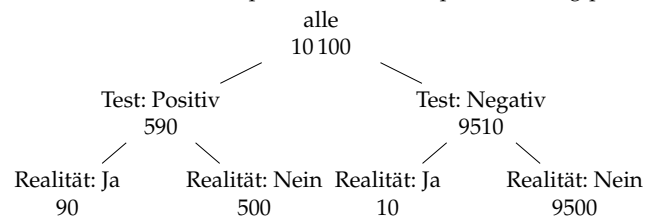
Baum 1 (absolut)

Bei der Darstellung unten ist in den Knoten jeweils die Situation wie auch die Anzahl ersichtlich (z.B., insgesamt gibt es 10 000 Geburten ohne Trisomie 21 oder von den Geburten mit Trisomie 21 war der Test in insgesamt 90 Fällen positiv).



Baum 2 (absolut)

Man kann nun aber diesen Baum auch anders darstellen: Anstelle der ersten Gruppierung nach Realität ja/nein tritt jetzt Test positiv/negativ. Die Zahlen entstehen durch «umgekehrtes Zusammenzählen»: Auf der ersten Stufe erscheint der Test: Die Fälle «Test: Positiv» ist dabei die Summe aus den 500 (Test positiv bei Realität negativ, falsch-positive) und den 90 (Test positiv bei Realität positiv, richtig-positive).



Notiz

Baumdiagramme werden oft verwendet, um Häufigkeiten darzustellen. Mit jeder vertikalen Stufe mehr, wird die darüberliegende Stufe verfeinert.

Notiz

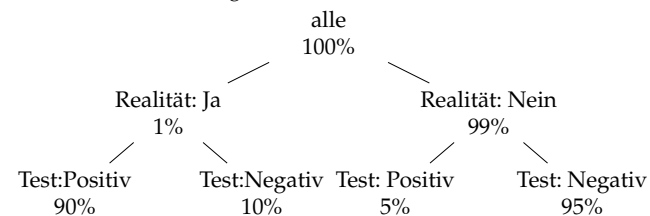
Vergegenwärtige dir, was Test positiv/negativ resp. Realität positiv/negativ heisst, wenn du Mühe mit der Sprechweise hast.

Relative Häufigkeiten: Wahrscheinlichkeiten in medizinischen Tests

Wenn wir nun die Endpunkte der Bäume durch die Anzahl des darüberliegenden Knoten teilen, erhalten wir relative Häufigkeiten oder eben Wahrscheinlichkeiten: Damit können dann Fragen beantwortet werden wie «Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit einer Trisomie 21 bei Geburt, wenn der Test auffällig ist?» (Baum 2) oder «Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test auffällig ist, wenn Trisomie 21 vorliegt?».

Baum 1 (relativ)

Für den ersten Baum ergibt dies:

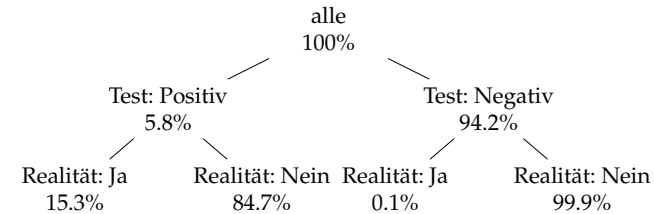


Lesehilfe: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Test negativ ist, wenn in Tat und Wahrheit Trisomie 21 vorliegt, beträgt 10%

Dein Einsatz: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Test positiv ist, wenn in Tat und Wahrheit keine Trisomie 21 vorliegt, beträgt _____.

Baum 2 (relativ)

Genau das gleiche können wir mit dem zweiten Baum machen: Dieser sieht dann so aus.



Lesehilfe: Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Kind Trisomie 21 vorliegt, wenn der Test positiv ist, beträgt 15.3%.

Dein Einsatz: Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Kind keine Trisomie 21 vorliegt, wenn der Test negativ ist, beträgt _____.

Notiz

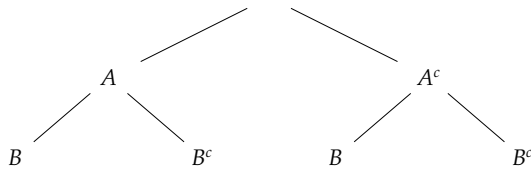
Notiere dir die Formeln, wie du von einem Baum mit den Häufigkeiten zum anderen Baum mit den Wahrscheinlichkeiten kommst

Notiz

Kannst du einzig auf Grund von Baum 1 im Bereich «Häufigkeiten» Baum 2 im Bereich «Wahrscheinlichkeiten» berechnen? Wenn ja, wie?

Begriffe

Das Beispiel oben kann man nun auch abstrakt fassen: Im «Baum 2 (relativ)» wäre das Ereignis A : «Test ist positiv», A^c : «Test ist negativ» und B : «Das Kind hat Trisomie 21», B^c : «Das Kind hat keine Trisomie 21»



Man spricht dabei von der *bedingten Wahrscheinlichkeit*: So ist z.B. $P(A|B)$ (lies: «die Wahrscheinlichkeit von A bedingt auf B ») die Wahrscheinlichkeit eines positiven Testresultats, wenn das Kind tatsächlich Trisomie 21 hat.

Dein Einsatz: Was bedeutet $P(A^c|B)$?

Dein Einsatz: Gib $P(A|B^c)$, $P(B|A^c)$ auf Grund der vorangehenden Bäume an.

Notiz

$P(A|B)$ und $P(B|A)$ ist nicht das gleiche. Man kann aber die bedingte Wahrscheinlichkeit von beliebigen zwei Ereignissen angeben; vorausgesetzt, dass Ereignis auf welches bedingt wird (das nach |) hat eine positive Wahrscheinlichkeit.

Echte Zahlen (wissenschaftlich abgesichert)

Für die Nackenfalten Messung – eine Art zu überprüfen, ob weitere Abklärungen für Trisomie 21 angezeigt sind – gibt es publizierte Zahlen zur Spezifität und Sensitivität (Baum 1). Ebenso ist das Risiko («Prävalenz») einer Trisomie 21 bekannt (Baum 1). Dieses Risiko ist allerdings altersabhängig. Untenstehend daher eine Tabelle, die die vorangehenden Fragen für verschiedenen Alter der Mutter gemäss den Bäumen berechnet hat. Wir gehen dabei von einer konstanten Spezifität und Sensitivität von Comas et al. (2002) aus.¹

Alter	Realität					
	Anzahl		W'keit		Wahrscheinlichkeit	
	Ja	Nein	Ja	Positiver Test	Trisomie 21 bei positivem Test	Keine Trisomie 21 bei positivem Test
20	1	1529	0.1%	4.6%	0.8%	99.2%
25	1	1352	0.1%	4.6%	1.0%	99.0%
30	1	910	0.1%	4.7%	1.4%	98.6%
35	1	385	0.3%	4.7%	3.3%	96.7%
40	1	113	0.9%	5.1%	10.3%	89.7%
45	1	29	3.3%	6.4%	31.0%	69.0%

Lesehilfe: Für eine Frau im Alter von 20 Jahren beträgt die Wahrscheinlichkeit eines gesunden Kindes bei positivem Testresultat 99.2%.

Lesehilfe: Für eine Frau im Alter von 35 Jahren beträgt die Wahrscheinlichkeit eines Trisomie 21 Kindes bei positivem Testresultat 4.7%.

Lesehilfe: Für eine Frau im Alter von 35 Jahren beträgt die Wahrscheinlichkeit, ein positives Testresultat zu erhalten, 4.7%.

Das Basisrisiko («Prävalenz») einer Trisomie 21-Geburt beträgt, 0.1%, resp. eine Geburt auf 1529 Geburten weist Trisomie 21 auf.

Literatur

Comas, C., Torrents, M., Muñoz, A., Antolín, E., Figueras, F. & Echevarría, M. (2002), 'Measurement of nuchal translucency as a single strategy in trisomy 21 screening: should we use any other marker?', *Obstetrics & Gynecology* **100**(4), 648–654.

Kahneman, D. (2011), *Thinking, fast and slow*, Macmillan.

Notiz

Die «Ungenauigkeit» dieses Tests kommt daher, dass die Nackenfaltenmessung ein «furchtbar analoges» Verfahren ist: Bei der Sonographie (Ultraschall) an sich kann es zu Verschiebungseffekten (Dopplereffekt) und Messfehlern (menschlicher Natur) kommen, zusätzlich dazu ist das Kriterium «Auffälligkeit» (häufig 2.5mm) ein relatives Kriterium, also ein Prozentrangkriterium.

¹Dies scheint alleweil gerechtfertigt: Ein Gynäkologe misst mit Ultraschall und platziert die Messpunkte von Hand. Wir verwenden eine Spezifität von 95.4% und eine Sensitivität von 60%.