15 Quadratische Gleichungen und Funktionen

Merke Wurzeln und Gleichungen

Die **Wurzel** ist eine **Funktion** und liefert **genau einen Wert**, nämlich eine positive Zahl (oder Null). D.h. $\sqrt{4} = 2$ und nicht -2.

Die **Gleichung** $x^2 = 4$ hingegen hat **zwei Lösungen**, nämlich $x = +\sqrt{4}$ und $x = -\sqrt{4}$, oder kurz $x = \pm 2$ geschrieben.

Bei **Gleichungen** kann **nicht auf beiden Seiten die Wurzel** gezogen werden, weil dies eine Verlustumformung darstellt und Lösungen verloren gehen können.

Merke Binomische Formeln

$$(x \pm b)^2 = \qquad\qquad (\heartsuit + \clubsuit) \cdot (\heartsuit - \clubsuit) =$$

Aufgabe 15.264 Lösen Sie der Reihe nach folgende Gleichungen (die alle zwei Lösungen haben). Bei u) bis x) lösen Sie ohne Diskussion der Spezialfälle.

a) $x^2 = 4$	b) $x^2 = 2$	c) $2x^2 = 3$	d) $2x^2 = 16$
e) $x^2 + 1 = 10$	f) $x^2 - 1 = 10$	g) $(x + 1)^2 = 4$	h) $(x + 1)^2 = 2$
i) $3(x + 1)^2 = 27$	j) $x^2 + 2x + 1 = 9$	k) $x^2 + 2x = 8$	l) $2x^2 + 4x + 2 = 8$
m) $x^2 - 2x + 1 = 16$	n) $x^2 - 4x + 4 = 9$	o) $x^2 - 4x = 5$	p) $x^2 - 6x = 16$
q) $3x^2 - 6x = 3$	r) $2x^2 - 12x + 7 = 0$	s) $-3x^2 + 18x = 12$	t) $x^2 + x - 1 = 0$
u) $ax^2 + c = 0$	v) $x^2 + bx = 0$	w) $x^2 + bx + c = 0$	x) $ax^2 + bx + c = 0$

Merke Wurzel ziehen aus Gleichungen

Wird bei einer Gleichung auf beiden Seiten die Wurzel gezogen, erhält man danach zwei Gleichungen:

$$L = R \mid \sqrt{\cdot} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{L} = \sqrt{R} \quad \text{oder} \quad \sqrt{L} = -\sqrt{R} \quad \text{bzw. in Kurzform} \quad \sqrt{L} = \pm\sqrt{R}$$

Merke Quadratisches Ergänzen

Der Term $x^2 + bx$ kann als Differenz eines Quadrats und einer Zahl geschrieben werden, indem geschickt eine Zahl dazu- und wieder abgezählt wird:

$$x^2 + bx =$$

Definition 15.33 Quadratische Gleichung

Eine Gleichung, die auf die Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

gebracht werden kann, nennt man eine **quadratische Gleichung**. Wobei $a \in \mathbb{R}^\star$, $b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$.

15.1 Mitternachtsformel

Damit nicht bei jeder quadratischen Gleichung quadratisch ergänzt werden muss, werden wir noch einmal für den allgemeinen Fall quadratisch Ergänzen und damit eine Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhalten:

Damit diese Formel überhaupt auswertbar ist, muss natürlich $a \neq 0$ sein (immer der Fall bei quadratischen Gleichungen) und vor allem $b^2 - 4ac \geq 0$.

Merke Diskriminante und Anzahl Lösungen

Für eine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ wird die Grösse $D = b^2 - 4ac$ **Diskriminante** genannt. Man unterscheidet drei Fälle für die Lösungen der Gleichung:

$$D < 0: \ \mathbb{L} = \varnothing \qquad D = 0: \ x = -\frac{b}{2a} \qquad D > 0: \ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Aufgabe 15.265 Lösen Sie Aufgaben m) bis t) aus Aufgabe 15.264 mit Hilfe der Mitternachtsformel.

Aufgabe 15.266 Lösen Sie folgende Gleichungen (mit Hilfe der Mitternachtsformel). Geben Sie Wurzelterme in den Lösungen in Normalform an.

a) $3x^2 + 2x - 1 = 0$
b) $3x^2 + 2x + \frac{1}{3} = 0$
c) $3x^2 + 2x + 1 = 0$
d) $2(x-1)(x-2) = (x-3)(x-4)$
e) $x^2 = 4x + 16$
f) $5x(x-65) = -4830$

Aufgabe 15.267 Folgende Aufgaben und Lösungen sind aus «Quadratische Gleichungen, Repetitionsaufgaben» von Felix Huber, KSR. Download `http://media.kswillisau.ch/ma/repetition/Quadratische_Gleichungen.pdf`

a) Von zwei Zahlen ist die eine um 50 grösser als die andere und das Produkt um 50 grösser als die Summe. Bestimmen Sie die beiden Zahlen. *Beispiel 14, S. 10*

b) Ein Blumenbeet von 3 m Länge und 2 m Breite ist ringsum mit konstanter Breite von Rasen eingefasst, so dass Einfassung und Beet gleichen Flächeninhalt haben. Wie breit ist die Einfassung? *Beispiel 15, S. 10*

c) Ein Mensch beginnt ein Geschäft mit Fr. 2000.-. Den Gewinn des ersten Jahres schlägt er voll zum Kapital. Im zweiten Jahr gewinnt er den gleich hohen Prozentsatz, wodurch das Kapital auf Fr. 2645.- anwächst. Wie viele Prozente hat er jedes Jahr gewonnen? *Beispiel 16, S. 11*

d) Das um 100 verminderte Quadrat einer gesuchten Zahl übertrifft die Zahl 200 um so viel, wie die gesuchte Zahl unter 300 liegt. *Aufgabe 23, S. 11*

e) Die Grundlinie eines Dreiecks von 3.6 m^2 Flächeninhalt ist um 11.4 m länger als die zugehörige Höhe. Berechnen Sie die Grundlinie. *Aufgabe 24, S. 11*

Aufgabe 15.268 Bestimmen Sie den Parameter t so, dass folgende Gleichungen genau eine Lösung haben:

a) $x^2 + 2x + t = 0$ b) $tx^2 + 5x - 1 = 0$ c) $x^2 + tx + t = 0$

d) $tx^2 + 3x = 3t$ e) $2x^2 + tx - 4 = 0$ f) $x^2 + x + 1 = tx$

15.2 Quadratische Terme faktorisieren

Satz 7

Sind x_1 und x_2 die Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ gilt:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

D.h. die Lösungsformel kann zum Faktorisieren von quadratischen Termen gebraucht werden.

Aufgabe 15.269 Beweisen Sie den Satz 7, indem Sie auf der rechten Seite für x_1 und x_2 die Mitternachtsformel einsetzen, ausmultiplizieren und vereinfachen, bis Sie die linke Seite erhalten.

Aufgabe 15.270 Faktorisieren Sie folgende Terme mit Hilfe der Lösungen der entsprechenden quadratischen Gleichung (oder via binomischen Formeln, wo möglich). Überprüfen Sie Ihre Lösung durch ausmultiplizieren.
Beispiel: $x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$, weil $x^2 + 7x + 12 = 0$ die Lösungen $x = 3$ und $x = -4$ hat.

a) $x^2 - 5x + 6$ b) $x^2 + 10x + 21$ c) $x^2 - 2x - 15$

d) $x^2 - 5$ e) $2x^2 + 8x + 8$ f) $4x^2 - 4x + 8$

Aufgabe 15.271 Für Terme der Form $x^2 + bx + c$ beweisen Sie folgende Faktorisierungsregel:
«Man sucht zwei Zahlen so, dass Ihr Produkt gleich c und ihre Summe gleich b ist. Diese zwei Zahlen z_1 und z_2 sind genau so, dass $(x + z_1)(x + z_2)$ die gesuchte Faktorisierung ist.»
Beispiel: $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$ weil $(-4) \cdot 3 = -12$ und $-4 + 3 = -1$.

Merke Faktorisierungsregel

Wenn $x^2 + bx + c = (x + e)(x + f)$, dann ist b die Summe $e + f$ und c das Produkt $e \cdot f$.

Merke Produkt gleich Null

Ist ein Produkt gleich Null, muss mindestens einer seiner Faktoren Null sein.
Bringt man eine Gleichung auf die Form «Produkt gleich Null» zerfällt die Gleichung in einzelne Gleichungen «Faktor gleich Null».

Aufgabe 15.272 Lösen Sie folgende Gleichungen, indem Sie anstatt die Mitternachtsformel zu verwenden die Gleichungen auf die Form «Produkt $= 0$» bringen.

a) $x^2 + 11x + 24 = 0$ b) $(x+3)(x+8) = x$ c) $x^2 + 4x = 32$

d) $3x^2 = 3x + 90$ e) $x^3 = 2x$ f) $(x+2)^2 = 4$

Aufgabe 15.273 Lösen die Gleichungen, indem Sie auf die Form «Produkt gleich Null» bringen. Die folgenden Gleichungen haben bis zu 5 Lösungen:

a) $x^3 + 4x^2 = 21x$ b) $(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 6x + 8) = 0$ c) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

d) $4x^5 - 4x^3 = 24x$ e) $(x^2 - 2)(x^3 - x^2 - 30x) = 0$ f) $(x^2 + 2)(x^3 + x) = 0$

15.3 Quadratische Funktionen

Merke Normalparabel

Der Graph der Funktion $f(x) = x^2$ ist eine Parabel, mit **Scheitel** im Punkt $(0,0)$, der y-Achse als Symmetrieachse, Leitlinie $y = -\frac{1}{4}$ und Brennpunkt $B = \left(0, \frac{1}{4}\right)$.

Aufgabe 15.274 Bestimmen Sie die exakten Koordinaten der Schnittpunkte folgender Geraden mit der Normalparabel (Graph der Funktion $f(x) = x^2$). Machen Sie jeweils eine Skizze der Situation, um Ihre Berechnungen zu validieren.

a) $g(x) = x + \frac{3}{4}$ b) $h(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ c) $i(x) = 2x - 1$ d) $j(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

15.3.1 Gleichungen mit dem TR lösen

Sie kennen sicher schon die Funktion `solve`, zu finden mit Menu, 3, 1. Löst man eine Gleichung damit, erhält man aber nicht einfach das Resultat, sondern wieder eine oder mehrere Gleichungen, nach der Variablen aufgelöst.

Will man nur die Werte, gibt es zwei Varianten. Entweder man bringt alles auf die linke Seite und erhält eine Gleichung $\ldots = 0$ und gibt dann die linke Seite in `zeros(...,x)` (Menu, 3, 4) ein.
Oder mit `exp▶list(solve(...,x),x)` (aus dem Katalog).

Man erhält mit beiden Varianten eine Liste mit den Lösungswerten. Mit Listen kann gerechnet werden. Die Operationen werden auf jedes Element der Liste angewandt.
Beispiel Aufgabe 15.274b). Lösungen speichern in `a`:

`zeros(x²+1/2*x-1,x)` $\rightarrow$ `a` oder `exp▶list(solve(x²=-1/2*x+1,x),x)` $\rightarrow$ `a`

Man erhält eine Liste mit den Lösungen: $\left\{\frac{-(\sqrt{17}+1)}{4}, \frac{\sqrt{17}-1}{4}\right\}$. Das sind x-Koordinaten der Schnittpunkte.
Die y-Koordinaten erhalten wir, indem wir quadrieren: `a`^{2} liefert $\left\{\frac{\sqrt{17}+9}{8}, \frac{-(\sqrt{17}-9)}{8}\right\}$.

15.3.2 Funktionen schneiden mit dem TR

Beispiel: Berechnen Sie die Schnittpunkt-Koordinaten der Graphen der Funktionen $f_1(x) = x^2 - x - 1$ und $f_2(x) = -x^2 + x + 2$.

Erst alle Variablen löschen: Menu, 1, 4, Enter. Dann die beiden Funktionen abspeichern:

`x^2-x-1` $\rightarrow$ `f1(x)` und `-x^2+x+2` $\rightarrow$ `f2(x)`

Achtung: Es muss für das erste Vorzeichen das «Vorzeichen Minus (-)», nicht das Subtraktionszeichen verwendet werden.

Die x-Koordinaten sind die Lösungen der Gleichung $f_1(x) = f_2(x)$, oder umgeformt, $f_1(x) - f_2(x) = 0$. Drücken Sie Menu, 3,4:

`zeros(f1(x)-f2(x),x)` $\rightarrow$ `a`

Man erhält die Liste $\left\{\frac{-(\sqrt{7}-1)}{2}, \frac{\sqrt{7}+1}{2}\right\}$. Die angenäherten Zahlen erhält man durch Eingabe von `a, ctrl, Enter`.

Die y-Koordinaten erhält man durch Einsetzen in f_1 oder f_2:

`f1(a)` liefert $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.

Der Grund warum die Funktionen f_1 und f_2 genannt wurden (und nicht etwa f und g) liegt darin, dass auf dem Taschenrechner die Funktionen, die gezeichnet werden, genau so heissen. Für die graphische Überprüfung wechseln Sie in der Graph-Modus und bearbeiten Sie die Funktionen mit `Menu, 3,1`. Es reicht die Funktionen mit `Enter` zu bestätigen, damit diese angezeigt werden.

Aufgabe 15.275 Beweisen Sie, dass $B = \left(0, \frac{1}{4}\right)$ der Brennpunkt und $y = -\frac{1}{4}$ die Leitlinie ℓ der Normalparabel $y = x^2$ ist.

Vorgehen: Sei p eine beliebige x-Koordinate. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P auf der Parabel mit x-Koordinate p und zeigen Sie, dass $\overline{BP} = \overline{\ell P}$.

Aufgabe 15.276 Bestimmen Sie die Funktsionsgleichung der Tangente an die Normalparabel $f(x) = x^2$ im Punkt $P = \left(p, p^2\right)$.

Vorgehen: Sei $g(x) = mx + q$ die Funktionsgleichung der Tangente. Wir wissen zwei Dinge: P liegt auf der Geraden und die Gerade schneidet die Parabel genau einmal.

Wählen Sie die Steigung m der Tangente als Unbekannte. Bestimmen Sie im ersten Schritt q so (Formel, die m enthält), dass die Gerade durch den Punkt P geht.

Bestimmen Sie im zweiten Schritt m so, dass die Gerade die Parabel in genau einem Punkt schneidet.

Merke Tangente der Normalparabel

Die Tangente an die Normalparabel $y = x^2$ im Punkt (p, p^2) hat die Funktionsgleichung $g(x) = 2px - p^2$.

Aufgabe 15.277 Beweisen Sie, dass von oben parallel zur y-Achse einfallende Strahlen von der Normalparabel $y = x^2$ zum Brennpunkt $B = \left(0, \frac{1}{4}\right)$ hinreflektiert werden. Die Reflexion an einer Kurve ist die gleiche wie die Reflexion an der Tangente im Reflexionspunkt. Es gilt «Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel».

Vorgehen: Sei p die x-Koordinate eines einfallenden Strahls s. Seien die Punkte P der Schnittpunkt des Strahls mit der Parabel und L der Schnittpunkt des verlängerten Strahls mit der Leitlinie. Sei M_{BL} der Mittelpunkt der Punkte B und L. Sei r die Gerade BP und t die Tangente an die Parabel im Punkt P.

Machen Sie eine sorgfältige Skizze der Situation.

Wie ist t speziell in Bezug auf s und r? Was hat $M_{BL} \in t$ damit zu tun?

Aufgabe 15.278 Gegeben sind zwei Parabeln, erstens die Normalparabel $f(x) = x^2$ und zweitens die Parabel $g(x) = -(x-2)^2 + \frac{3}{2}$. Bestimmen Sie die Gleichungen der gemeinsamen Tangenten an die Parabeln und die Koordinaten der Berührungspunkte.

Machen Sie eine Skizze vorher und eine genaue Zeichnung, nachdem Sie die Tangenten und Berührungspunkte berechnet haben.

Vorgehen: Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Normalparabel so, dass diese die zweite Parabel in genau einem Punkt schneidet.

15.3.3 Funktionsgraphen verschieben

Merke Verschiebung in y-Richtung

Wird zum ganzen Funktionsterm eine (positive) Zahl addiert bzw. subtrahiert, verschiebt sich der Funktionsgraph entsprechend in y-Richtung nach oben, bzw. nach unten.

Merke Verschiebung in x-Richtung

Wird x im Funktionsterm überall durch $(x-a)$ ersetzt, verschiebt sich der Funktiongraph um a Einheiten in x-Richtung.
Achtung: Konkret bedeutet ein Ersetzen durch $(x+3)$ eine Verschiebung um 3 Einheiten **nach links**. Beachte: $(x+3) = (x-(-3))$.

Aufgabe 15.279 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, wenn der Scheitel S der verschobenen Normalparabel bekannt ist. Schreiben Sie die Funktionsgleichung in der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$.

a) $S = (0, -2)$ b) $S = (2, 0)$ c) $S = (1, 1)$ d) $S = (-2, -3)$

Aufgabe 15.280 Schreiben Sie folgende quadratische Funktionen in der Form $f(x) = (x-a)^2 + b$ und bestimmen Sie damit den Scheitelpunkt. *Hinweis: Quadratisch ergänzen.*
Machen Sie zusätzlich eine kleine Handskizze der Graphen (Einheit 1 oder 2 Häuschen).

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ b) $f(x) = x^2 + 12x - 5$ c) $f(x) = x^2 - 6x + 6$ d) $f(x) = x(x-4)$

Aufgabe 15.281 Seien b und c zwei gegebene, beliebige reelle Zahlen. Bestimmen Sie den Scheitelpunkt der Parabel $f(x) = x^2 + bx + c$. *Hinweis: Quadratisch Ergänzen.*

Aufgabe 15.282 Skizzieren Sie folgende Graphen, ausgehend vom Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $g(x) = \sqrt{x-2} + 2$ c) $h(x) = \sqrt{x+2} - 2$ d) $i(x) = 2 + \sqrt{x-1}$

15.3.4 Funktionen strecken

Merke Strecken in y-Richtung

Wird der ganze Funktionsterm mit einer Zahl a multipliziert, wird der Graph an der x-Achse in y-Richtung mit Faktor a gestreckt. Ist a negativ, wird der Graph zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.

Merke Strecken in x-Richtung

Wird im Funktionsterm x durch ax ersetzt, wird der Graph an der y-Achse in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{a}$ gestreckt (und zusätzlich gespiegelt, wenn $a < 0$).
Achtung: Konkret bedeutet ein Ersetzen von x durch $2x$ eine Streckung mit Faktor $\frac{1}{2}$, d.h. der Graph wird zur y-Achse hin «gestaucht».

Aufgabe 15.283 Ausgehend vom Funktionsgraphen der Normalparabel $f(x) = x^2$, skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen:

a) $g(x) = 2x^2$ b) $h(x) = (2x)^2$ c) $i(x) = -x^2$ d) $j(x) = -\frac{1}{2}x^2$

Aufgabe 15.284 Ausgehend vom Funktionsgraphen von $f(x) = \sqrt{x}$, skizzieren Sie folgende Graphen:

a) $g(x) = -\sqrt{x}$ b) $h(x) = \sqrt{-x}$ c) $i(x) = -\sqrt{2x}$ d) $j(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{-x}$

15.3.5 Scheitelpunkt und Öffnungsfaktor

Merke

In einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ wird a **Öffnungsfaktor** genannt. Ist dieser **positiv**, ist die Parabel nach oben geöffnet. Ein betragsmässig grosser Öffnungsfaktor bedeutet eine «enge» Parabel.

Aufgabe 15.285 Im Folgenden sei $f(x) = ax^2 + bx + c$ eine allgemeine quadratische Funktion mit $a \neq 0$.

a) Bestimmen Sie die x-Koordinate des Scheitelpunktes von f. Klammern Sie dafür erst a aus und benutzen Sie dann die Formel aus Aufgabe 15.281.

b) Wie können die Lösungen von $f(x) = 0$ geometrisch interpretiert werden?

c) Was erhält man, wenn man den Durchschnitt der Lösungen von $f(x) = 0$ bildet? Was hat das mit dem Scheitelpunkt zu tun und warum?

Merke

Der Scheitel der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ hat die x-Koordinate $-\frac{b}{2a}$.

15.4 Repetitionsaufgaben

Aufgabe 15.286 Lösen Sie folgende Gleichungen, indem Sie die Gleichungen auf die Form «Produkt gleich Null» bringen:

a) $(x^3 + 2x^2 + x)(x^2 - 3x + 2) = 0$

b) $x^3 + 12x = 7x^2$

c) $(x^2 - 2)(x^3 - x) = 0$

d) $x^4 + 4 = 4x^2$

Aufgabe 15.287 Hinweis: Die x-Koordinate des Scheitels der Parabel $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist $\frac{-b}{2a}$.

a) In einer Turnhalle wird ein Volleyball zum Zeitpunkt $t = 0$ senkrecht nach oben geschossen. Die Höhe des Balls über Boden kann durch die Funktion $h(t) = 1 + 12t - 5t^2$ beschrieben werden.

Wann stösst der Ball an die Decke (8m über Boden)? Wie interpretieren Sie die zweite Lösung?

Wenn die Decke nicht wäre, wie hoch ist der höchste Punkt der vom Ball erreicht wird?

Skizzieren Sie die Funktion h.

b) Zeigen Sie, dass von allen Rechtecken mit Umfang 4 das Einheitsquadrat das Rechteck mit grösstem Flächeninhalt ist.

Aufgabe 15.288 Die Tangente t an $f(x) = x^2$ durch den Punkt (p, p^2) hat die Gleichung $t(x) = 2px - p^2$.

a) Wie lautet die Gleichung der Tangente an die Normalparabel, die durch den Punkt $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ geht? Machen Sie eine Skizze um Ihre Berechnung zu überprüfen.

b) Gegeben ist eine weitere Parabel $g(x) = -(x-4)^2 + 6$. Zeigen Sie rechnerisch, dass die gemeinsamen Tangenten an f und g die Parabel f in den x-Koordinaten 1 und 3 berühren.

Berechnen Sie auch die Berührungspunkte mit g und machen Sie eine Skizze der Situation.

c) * Sei $P = (s, t)$ ein beliebiger Punkt unterhalb der Normalparabel f. Zeigen Sie, dass die x-Koordinaten der beiden Berührungspunkte der Tangenten an f sich um jeweils gleich viel von s unterscheiden.

15.5 Komplexe Zahlen

Nachdem sich Mathematiker durchgerungen haben, negative Zahlen auch als ganz normale Zahlen zu akzeptieren, stellte sich immer wieder die Frage, wie mit Wurzeln aus negativen Zahlen umzugehen ist.

Es stellt sich heraus, dass man die reellen Zahlen um «Wurzeln aus negativen Zahlen» erweitern kann, so wie die natürlichen Zahlen um ganze Zahlen, dann um Brüche und schliesslich um reelle Zahlen erweitert worden sind.

Einer der ersten, die sich damit beschäftigt haben, war der Mathematiker Cardano (1501 - 1576). Als Beispiel ist folgende Aufgabe überliefert:

Aufgabe 15.289 Gesucht sind zwei Zahlen mit Summe 10 und Produkt 30. Schreiben Sie die Lösungen mit Hilfe der Mitternachtsformel auf (wird Wurzeln aus negativen Zahlen enthalten). Bilden Sie dann die Summe und das Produkt, um die Lösungen zu überprüfen.

Man stellt fest, dass diese Ausdrücke Lösungen des Problems sind, gleichzeitig aber keine reellen Zahlen sein können. Während dies eine etwas sinnfreie Aufgabe ist, hat Cardano aber mit Hilfe dieser «sophistischen Ausdrücke» schliesslich eine Lösungsformel für Gleichungen 3. Grades erarbeitet.

Heute bilden komplexe Zahlen das Fundament der Quantenphysik (Beschreibung von Vorgängen in atomaren Grössenordnungen), Signalverarbeitung, Regeltechnik und weiteren Anwendungsgebieten.

Merke Komplexe Zahlen

Die Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nennt man heute **komplexe Zahlen** $\mathbb{C}$. Die komplexen Zahlen enthalten die spezielle **imaginäre Einheit** i mit der Eigenschaft

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Eine komplexe Zahl $c \in \mathbb{C}$ hat die Form

$$c = a + b\,\mathrm{i} \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R},$$

wobei a der **Realteil** und b der **Imaginärteil** von c genannt wird.
Alle bekannten Rechengesetze sind auch für komplexe Zahlen gültig.

Aufgabe 15.290 Berechnen Sie und geben Sie das Resultat in der Form $(a + b\,\mathrm{i})$ an.

a) $(3 + 2\mathrm{i}) + (1 + 4\mathrm{i})$

b) $(1 + \mathrm{i})^2$

c) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1 + \mathrm{i})\right)^8$

d) $(1 - \mathrm{i}) \cdot (1 + \mathrm{i})$

e) $\frac{(2+\mathrm{i})}{\mathrm{i}}$

f) $\frac{-2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$

15.5.1 Geometrische Interpretation

Die komplexen Zahlen können als Punkte einer Ebene aufgefasst werden, wobei die x-Achse den reellen Zahlen und die y-Achse den rein imaginären Zahlen entspricht.

Definition 15.34 Betrag und Argument

Der **Betrag** einer komplexen Zahl ist gleich dem Abstand von 0. D.h.

$$|a + b\,\mathrm{i}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Das **Argument** einer komplexen Zahl c ist gleich dem orientierten Winkel zwischen der positiven reellen Achse und der orientierten Geraden von 0 zu c.

Die **Addition** zweier komplexen Zahlen entspricht (wie bei den reellen Zahlen) dem aneinanderhängen von zwei Pfeilen.

Die **Multiplikation** zweier komplexen Zahlen entpricht einer Streckung (wie bei den reellen Zahlen) mit einer zusätzlichen Rotation. Konkret werden die Argumente addiert und die Beträge multipliziert.

Wird mit einer komplexen Zahl c mit Betrag 1 multipliziert, entspricht dies einer Drehung um den Ursprung mit dem Argument von c.

Aufgabe 15.291

a) Schreiben Sie die komplexe Zahl c mit Betrag 1 und Argument 45°in der Form $a + b\,\mathrm{i}$.

b) Schreiben Sie die komplexe Zahl c mit Betrag r und Argument φ in der Form $a + b\,\mathrm{i}$.

Aufgabe 15.292 Bestimmen Sie alle 12 komplexen Lösungen von $x^{12} = 1$. *Hinweis: Überlegen Sie sich, was das Potenzieren geometrisch bedeutet.*

15.5.2 Die Mandelbrotmenge

Für jede komplexe Zahl c wird mit $z = 0$ gestartet und folgende Berechnung wiederholt:

$$z := z^2 + c$$

Aufgabe 15.293 Was passiert mit dem Betrag von z wenn $|z| > 2$ und $|c| < 2$?

Definition 15.35 Mandelbrotmenge

Die Mandelbrotmenge ist die Menge aller komplexen Zahlen c für die die wiederholte Anwendung der Formel $z := z^2 + c$ (Start mit $z = 0$) den Betrag von z **nicht** beliebig anwachsen lässt.

Vorgehen: Starte mit einem c und $z = 0$. Zähle, wie viel mal $z := z^2 + c$ gerechnet werden kann bevor $|z| > 2$. Nach einer gegebenen Anzahl Wiederholungen, brich ab.

Färbe c mit der Farbe ein, deren Nummer der Anzahl Wiederholungen entspricht.

15.6 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 15.264 ex-mitternachts-formel-erarbeiten

a) $x = \pm 2$

b) $x = \pm\sqrt{2}$

c) $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

d) $x = \pm 2\sqrt{2}$

e) $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

f) $x^2 = 11 \Rightarrow x = \pm\sqrt{11}$

g) $(x+1) = \pm 2 \Rightarrow x_1 = 1\ x_2 = -3$

h) $(x+1) = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x_1 = \sqrt{2}-1\ x_2 = -\sqrt{2}-1$

i) $(x+1)^2 = 9 \Rightarrow (x+1) = \pm 3 \Rightarrow x_1 = 2\ x_2 = -4$

j) $(x+1)^2 = 9 \Rightarrow x_1 = 2\ x_2 = -4$

k) $x^2+2x+1 = 9 \Rightarrow x_1 = 2\ x_2 = -4$

l) $x^2+2x+1 = 4 \Rightarrow (x+1)^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 1\ x_2 = -3$

m) $(x-1)^2 = 16 \Rightarrow x_1 = 5\ x_2 = -3$

n) $(x-2)^2 = 9 \Rightarrow x_1 = 5\ x_2 = -1$

o) $x^2-4x+4 = 9 \Rightarrow x_1 = 5\ x_2 = -1$

p) $x^2-6x+9 = 25 \Rightarrow x_1 = 8\ x_2 = -2$

q) $x^2-2x = 1 \Rightarrow x^2-2x+1 = 2 \Rightarrow (x-1)^2 = 2 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2}+1\ x_2 = -\sqrt{2}+1$

r) $x^2-6x+\frac{7}{2} = 0 \Rightarrow x^2-6x+9 = \frac{11}{2} \Rightarrow (x-3)^2 = \frac{11}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{22}}{2}+3\ x_2 = -\frac{\sqrt{22}}{2}+3$

s) $x^2-6x = -4 \Rightarrow x^2-6x+9 = 5 \Rightarrow x_1 = \sqrt{5}+3\ x_1 = -\sqrt{5}+3$

t) $x^2+x+\frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\ x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}$

u) $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ (wobei a und c unterschiedliche Vorzeichen haben müssen).

v) $x(x+b) = 0$ also entweder $x = 0$ oder $x+b = 0$, also $x = -b$.

w)

$$
\begin{aligned}
x^2+bx+c &= 0 && \left|+\frac{1}{4}b^2-c\right.\\
x^2+bx+\frac{1}{4}b^2 &= \frac{1}{4}b^2-c\\
\left(x+\frac{1}{2}b\right)^2 &= \frac{1}{4}b^2-c && |\sqrt{\cdot}\\
x+\frac{1}{2}b &= \pm\sqrt{\frac{1}{4}b^2-c} && \left|-\frac{1}{2}b\right.\\
x &= -\frac{1}{2}b\pm\sqrt{\frac{1}{4}b^2-c}
\end{aligned}
$$

x) Siehe Seite 85

Lösung zu Aufgabe 15.266 ex-allg-quadratische-gleichungen

a) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -1$

b) $x = -\frac{1}{3}$

c) $\mathbb{L} = \varnothing$

d)

$$\begin{aligned} 2(x-1)(x-2) &= (x-3)(x-4) \\ 2(x^2-3x+2) &= x^2-7x+12 \\ 2x^2-6x+4 &= x^2-7x+12 && |-x^2+7x-12 \\ x^2+x-8 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-1\pm\sqrt{33}}{2} \end{aligned}$$

e) $x^2-4x-16=0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{80}}{2} = 2\pm 2\sqrt{5}$

f) $5x^2-325x+4830=0 \;\Rightarrow\; x_1=42,\ x_2=23$

Lösung zu Aufgabe 15.267 ex-textaufgaben-quadr-gleichung

Folgende Aufgaben und Lösungen sind aus «Quadratische Gleichungen, Repetitionsaufgaben» von Felix Huber, KSR. Download http://media.kswillisau.ch/ma/repetition/Quadratische_Gleichungen.pdf

a) 1. Schritt : Variable(n) deklarieren:

$$x: \text{ Kleinere Zahl, grössere Zahl :} x+50$$

2. Schritt : Gleichung aufstellen:
Da das Produkt um 50 grösser ist als die Summe, muss zur Summe 50 addiert werden, um auf das gleiche Ergebnis zu kommen: Produkt = Summe + 50 also

$$x(x+50) = (x+(x+50))+50$$

3. Schritt: Gleichung lösen

$$\begin{aligned} x(x+50) &= (x+(x+50))+50 \\ x^2+50x &= 2x+100 && |-2x-100 \\ x^2+48x-100 &= 0 && |\text{Faktorisieren oder Lösungsformel} \\ (x-2)(x+50) &= 0 \\ x-2=0 &\text{ oder } x+50=0 \\ x=2 &\text{ oder } x=-50 \end{aligned}$$

4. Schritt: Antwortsatz

Die beiden Zahlen lauten 2 und 52 oder -50 und 0.

b) x: Breite der Einfassung.

Gleichung: Fläche Beet = Fläche Einfassung (machen Sie eine Skizze!)

$$
\begin{aligned}
2\cdot 3 &= 2\cdot 2x + 2\cdot 3x + 4x^2 \\
6 &= 10x + 4x^2 && |-6 \\
0 &= 4x^2 + 10x - 6 && |:2 \text{ dieser Schritt ist optional} \\
0 &= 2x^2 + 5x - 3 && |\text{Lösungsformel} \\
x_1 = \frac{1}{2} x_2 &= -3
\end{aligned}
$$

Die zweite, negative Lösung kann verworfen werden.

Die Einfassung ist 0.5 m breit.

c) x: Prozentsatz (als reelle Zahl).

Gleichung: Kapital nach 2 Jahren:

$$
\begin{aligned}
2645 &= 2000\cdot(1+x)^2 && |:2000 \\
\frac{529}{400} &= (1+x)^2 && |\sqrt{\cdot} \\
\pm\frac{23}{20} &= 1+x && |-1 \\
x_1 = \frac{3}{20} x_2 &= -\frac{43}{20}
\end{aligned}
$$

Die erste Lösung entspricht einem Zins vom 0.15=15%.

Die zweite (unbrauchbare negative Lösung) entspricht einem grossen Verlust im ersten Jahr, auf dieses negative Kapital (Schulden) wird ein negativer Zins erwirtschaftet, was dann einem Gewinn entspricht.

d) $x^2 - 100 - 200 = 300 - x$, Lösungen $x_1 = -25$, $x_2 = 24$.

Die Zahl ist -25 oder 24.

e) $3.6 = \frac{x(x-11.4)}{2}$, Lösungen $x_1 = 12$, $x_2 = -0.6$ Die Grundlinie ist 12 m lang.

(Die negative Lösung kann als betragsmässig gleiche aber vertauschte Strecken interpretiert werden (Grundlinie und Höhe vertauscht)).

Lösung zu Aufgabe 15.268 ex-anzahl-loesungen-quadr-gleichung

In allen Gleichungen muss die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ Null sein, damit die Gleichung (für x) genau eine Lösung hat. Dies ergibt eine Gleichung für t.

a) $D = 4 - 4t = 0$, also $t = 1$.

b) $D = 25 + 4t = 0$, also $t = -\frac{25}{4}$.

c) $D = t^2 - 4t = 0$, also $t = 0$ oder $t = 4$.

d) $D = 9 + 12t^2 = 0$, keine Lösung ($12t^2 \geq 0 > -9$).

e) $D = t^2 + 32 = 0$, keine Lösung.

f) $x^2 + x(1-t) + 1 = 0$, also $D = (1-t)^2 - 4 = 0$, d.h. $t_1 = 3$, $t_2 = -1$.

Lösung zu Aufgabe 15.269 ex-beweis-faktorisierung

$$\begin{aligned}
&a(x-x_1)(x-x_2) = a\left(x^2 - x(x_1+x_2) + x_1x_2\right) = \\
&= ax^2 - ax\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) + a\cdot\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \\
&= ax^2 - ax\frac{-2b}{2a} + a\cdot\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \\
&= ax^2 + bx + \frac{4a^2c}{4a^2} = ax^2 + bx + c
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 15.270 ex-faktorisieren

a) $(x-2)(x-3)$

b) $(x+3)(x+7)$

c) $(x-5)(x+2)$

d) $\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)$ (bin. F.)

e) $2(x+2)^2$ (bin. F.)

f) Dieser Term ist nicht faktorisierbar. Die Diskriminante der entsprechenden Gleichung ist negativ.

Lösung zu Aufgabe 15.271 ex-faktorisierungsregel

Der Beweis wird am einfachsten «von hinten her» geführt und ausmultipliziert:

$$(x+z_1)(x+z_2) = x^2 + xz_2 + xz_2 + z_1z_2 = x^2 + x(z_1+z_2) + z_1z_2$$

Damit muss die Summe z_1+z_2 gleich b und das Produkt z_1z_2 gleich c sein.

Lösung zu Aufgabe 15.272 ex-gleichungen-faktorisieren

a) $(x+3)(x+8)=0$, also $x+3=0$ oder $x+8=0$ und damit $x_1=-3$, $x_2=-8$.

b) Ausmultiplizieren, x subtrahieren, faktorisieren: $(x+4)(x+6)=0$, also $x_1=-4$, $x_2=-6$.

c) $(x-4)(x+8)=0$, also $x_1=4$, $x=-8$.

d) Durch 3, alles auf eine Seite: $(x+5)(x-6)=0$, also $x_1=-5$, $x_2=6$.

e) $2x$ subtrahieren, x ausklammern: $x(x^2-2)=0$, also $x=0$ oder $x^2-2=0$, also $x_1=0$, $x_2=-\sqrt{2}$, $x_3=\sqrt{2}$.

f) Ausquadrieren, 4 subtrahieren, x ausklammern: $x(x+4)=0$, also $x_1=0$, $x_2=-4$.

:

Lösung zu Aufgabe 15.273 ex-gleichungen-faktorisieren-hq

a) $x(x+7)(x-3)=0$, also $x_1=0$, $x_2=-7$, $x_3=3$.

b) $(x+1)(x+3)(x+2)(x+4)=0$, also $x_1=-1$, $x_2=-2$, $x_3=-3$, $x_4=-4$.

c) $(x^2+1)^2=0$, also $x^2=-1$ und damit $\mathbb{L}=\varnothing$.

d) Durch 4, minus $24x$, x ausklammern: $x(x^4-x^2-6)$. Schreibt man in der Klammer y anstelle von x^2, sieht die Klammer wie folgt aus: $(y^2-y-6)=(x-3)(x+2)$. Ersatz man wieder y durch x^2 erhält man: $x(x^2-3)(x^2+2)=0$ und damit $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$. (Die letzte Klammer ist nie Null).

e) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})\cdot x\cdot(x+5)(x-6)=0$, also $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$, $x_3=0$, $x_4=-5$, $x_5=6$.

f) $(x^2+2)\cdot x\cdot(x^2+1)=0$. Die Klammern sind immer positiv, die einzige Lösung ist also $x=0$.

Lösung zu Aufgabe 15.274 ex-schnitt-normalparabel-gerade

Die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen zweier Funktionen erhält man, indem man die Funktionsterme (y-Koordinaten) gleichsetzt.

a) $x^2 = x+1$, Lösungen $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$. Für die y-Koordinaten setzt man die erhaltenen x-Koordinaten in eine der beiden Funktionen ein (in welche spielt keine Rolle, da beide das gleich ergeben müssen).
Schnittpunkte: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

b) $x^2 = -\frac{1}{2}x + 1$, Lösungen $x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$.
Schnittpunkte: $\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{4}, \frac{\sqrt{17}+9}{8}\right)$ und $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}, \frac{9-\sqrt{17}}{8}\right)$

c) $x^2 = 2x-1 \;\Leftrightarrow\; x^2-2x+1=0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)^2=0$ also $x=1$ als einzige Lösung. Schnittpunkt $(1,1)$.

d) Die Gleichung $x^2 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ hat keine Lösung. Die Gerade schneidet die Parabel nicht.

Lösung zu Aufgabe 15.275 ex-normalparabel-leitlinie

$P = \left(p, p^2\right)$. Damit ist $\overline{BP} = \sqrt{p^2 + \left(p^2 - \frac{1}{4}\right)^2}$ und $\overline{\ell P} = p^2 + \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned}
\overline{BP} &= \sqrt{p^2 + \left(p^2 - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{p^2 + p^4 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{16}} = \\
&= \sqrt{p^4 + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{16}} = \sqrt{\left(p^2 + \frac{1}{4}\right)^2} = \\
&= p^2 + \frac{1}{4} = \overline{\ell P}
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Lösung zu Aufgabe 15.276 ex-normalparabel-tangente

P auf Tangente, also $g(p) = p^2$, d.h.

$$\begin{aligned}
mp + q &= p^2 \qquad\qquad | -mp \\
q &= p^2 - mp
\end{aligned}$$

D.h. $g(x) = mx + p^2 - mp$. Genau ein Schnittpunkt heisst $f(x) = g(x)$ hat genau eine Lösung (Gleichung für x):

$$mx + a^2 - mp = x^2 \qquad | -x^2 \qquad -x^2 + mx + (p^2 - mp) \quad = 0 \qquad \text{Diskriminante } D = m^2 + 4(p^2 - mp)$$

Die Gleichung hat genau eine Lösung, wenn die Diskriminante Null ist, was eine Gleichung für m ergibt:

$$\begin{aligned}
m^2 + 4(p^2 - mp) &= 0 \\
m^2 - 4mp + 4p^2 &= 0 \\
(m-2p)^2 &= 0 \\
m - 2p &= 0 \\
m &= 2p
\end{aligned}$$

Resultat: Die Tangentensteigung im Punkt $\left(p, p^2\right)$ der Normalparabel ist $m = 2p$. Der Achsenabschnitt ist $q = p^2 - 2p \cdot p = -p^2$ und damit die Tangentengleichung: $g(x) = 2px - p^2$.

Lösung zu Aufgabe 15.277 ex-normalparabel-reflexionseigenschaft

Da L und B gleich weit von P entfernt sind (Definition der Parabel), liegt der Mittelpunkt M_{BL} auf der Winkelhalbierenden von s und r. Wenn M_{BL} auch auf t liegt, ist t also die Winkelhalbierende und Ein- und Ausfallswinkel sind also gleich gross:
$L = \left(p, -\frac{1}{4}\right)$ und damit $M_{LB} = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Eingesetzt in die Gleichung der Tangente $g(x) = 2px - p^2$ erhält man $g\left(\frac{p}{2}\right) = 2p \cdot \frac{p}{2} - p^2 = 0$ und damit ist $L \in t$ und somit ist t die Winkelhalbierende.

Q.E.D.

Lösung zu Aufgabe 15.278 ex-normalparabel-gemeinsame-tangente

Die Tangente hat die Funktionsgleichung $t(x) = 2px - p^2$, wobei p die (noch unbekannte) x-Koordinate des Berührungspunktes der Tangente mit der Normalparabel ist.

Die Gleichung für x-Koordinate des Schnittpunkts der Tangente t mit der anderen Parabel t soll genau eine Lösung haben:

$$\begin{aligned}
t(x) &= g(x) \\
-(x-2)^2 + \frac{3}{2} &= 2px - p^2 \\
-x^2 + 4x - 4 + \frac{3}{2} &= 2px - p^2 && \mid -2px + p^2 \\
-x^2 + (4-2p)x + \left(-\frac{5}{2} + p^2\right) &= 0 && \text{Diskriminante } D = (4-2p)^2 + 4\left(-\frac{5}{2} + p^2\right) \\
x = \frac{-(4-2p)}{-2} &= 2 - p && \text{wenn } D = 0
\end{aligned}$$

Damit die Gleichung für x genau eine Lösung hat, muss die Diskriminante Null sein, was eine Gleichung für p ergibt:

$$\begin{aligned}
(4-2p)^2 + 4(-\frac{5}{2} + p^2) &= 0 \\
(2(2-p))^2 + 2(2p^2 - 5) &= 0 \\
4(4 - 4p + p^2) + 2(2p^2 - 5) &= 0 && \mid :2 \\
2(4 - 4p + p^2) + 2p^2 - 5 &= 0 \\
8 - 8p + 2p^2 + 2p^2 - 5 &= 0 \\
4p^2 - 8p + 3 &= 0 \\
p_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{8} = \frac{8 \pm 4}{8} &= 1 \pm \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Wir erhalten also zwei Tangenten, $t_1(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ und $t_2(x) = \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$.
Die Berührungspunkte für die erste Tangente sind $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ und $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$.
Die Berührungspunkte für die zweite Tangente sind $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ und $\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{4}\right)$.

Lösung zu Aufgabe 15.279 ex-normalparabel-verschieben

a) $f(x) = x^2 - 2$

b) $f(x) = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

c) $f(x) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$

d) $f(x) = (x+2)^2 - 3 = x^2 + 4x + 1$

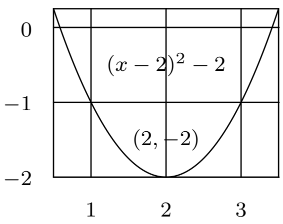
Lösung zu Aufgabe 15.280 ex-scheitelpunkt-parabel-bestimmen

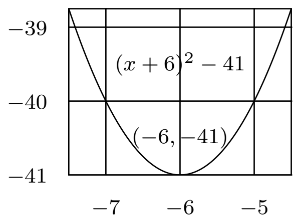
a) $f(x) = x^2 - 4x + 4 - 4 + 2 = (x-2)^2 - 2$. Also Scheitelpunkt $S = (2, -2)$.

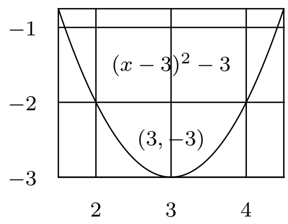
b) $f(x) = x^2 + 12x + 36 - 36 - 5 = (x+6)^2 - 41$. Also Scheitelpunkt $S = (-6, -41)$.

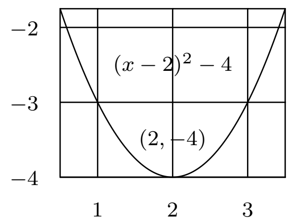
c) $f(x) = x^2 - 6x + 9 - 9 + 6 = (x-3)^2 - 3$. Also Scheitelpunkt $S = (3, -3)$.

d) $f(x) = x^2 - 4x + 4 - 4 = (x-2)^2 - 4$. Also Scheitelpunkt $S = (2, -4)$.









Lösung zu Aufgabe 15.281 ex-scheitelpunkt-parabel-bestimmen-allgemein
Man ergänzt wieder quadratisch:
$f(x) = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}$.
Der Scheitelpunkt hat also die Koordinaten $S = \left(-\frac{b}{2},\, c - \frac{b^2}{4}\right)$.

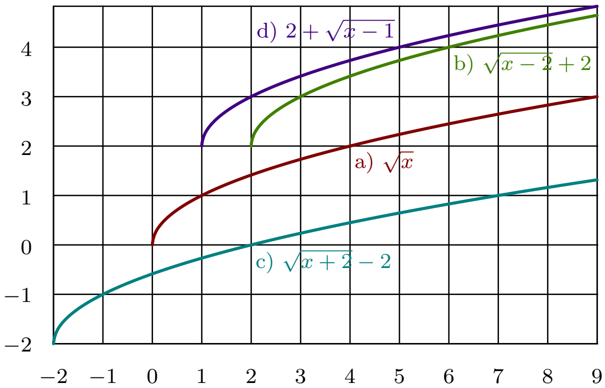
Lösung zu Aufgabe 15.282 ex-wurzelgraphen-verschieben

a) «Standardgraph der Wurzelfunktion» (halbe liegende Parabel).

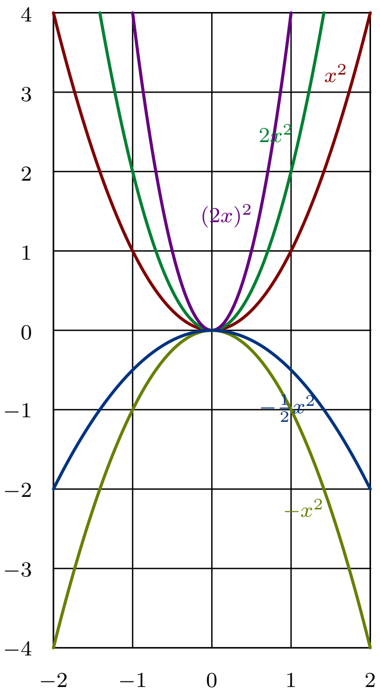
b) Verschiebung um 2 nach rechts, 2 nach oben.

c) Verschiebung um 2 nach links, 2 nach unten.

d) Verschiebung um 1 nach rechts, 2 nach oben.



Lösung zu Aufgabe 15.283 ex-normalparabeln-oeffnungsfaktor
Aufgabe b) kann sowohl als Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$, wie auch als Streckung mit Faktor 4 in y-Richtung betrachtet werden, da $(2x)^2 = 4 \cdot x^2$.



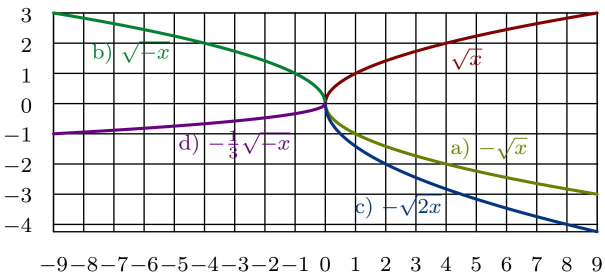
Lösung zu Aufgabe 15.284 ex-wurzelfunktionen-strecken

a) Ganze Funktion wird mit -1 multipliziert. Also Spiegelung an x-Achse.

b) x wird durch $-x$ ersetzt, also Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{-1} = -1$, d.h. Spiegelung an der y-Achse.

c) Ausgehend von $-\sqrt{x}$ wird x durch $2x$ ersetzt, d.h. es wird mit Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung gestreckt.
Man könnte auch schreiben $-\sqrt{2x} = -\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}$, d.h. der «normale» Wurzelfunktionsgraph wird mit Faktor $-\sqrt{2}$ in y-Richtung gestreckt.

d) Ausgehend von $\sqrt{-x}$ wird der Funktionsgraph mit Faktor $-\frac{1}{3}$ in y-Richtung gestreckt.



Lösung zu Aufgabe 15.285 ex-scheitelpunkt-allgemein

a) $f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ Der Faktor a bewirkt eine Streckung in y-Richtung, ändert also die x-Koordinate des Scheitelpunktes nicht. Die x-Koordinate ist also die gleiche wie von der Parabel $f(x) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$, also $-\frac{b}{2a}$.

b) Wenn es Lösungen gibt, sind dies die Schnittpunkt der Parabel mit der x-Achse (dort wo der y-Wert eben Null ist).

c) $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \frac{1}{2}\frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{2a}$.
Die Symmetrieachse der Parabel ist parallel zur y-Achse und geht durch den Scheitelpunkt. Wenn es also Schnittpunkte mit der x-Achse gibt, sind diese gleich weit von der Symmetrieachse entfernt. Der Scheitel liegt also dazwischen, d.h. dessen x-Koordinate ist der Durchschnitt der x-Achsenschnittpunkte.

Lösung zu Aufgabe 15.286 ex-gleichungen-faktorisieren-repe

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer seiner Faktoren Null ist.

a) $x(x^2+2x+1)(x-1)(x-2) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x(x+1)^2(x-1)(x-2) = 0$. Also $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x = 1$, $x = 2$.

b) $x^3 - 7x^2 + 12x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x(x^2-7x+12) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x(x-3)(x-4) = 0$. Also $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$.

c) $(x^2-2)(x^3-x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})\cdot x\cdot(x-1)(x+1) = 0$ Also $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = 0$, $x = 1$, $x = -1$.

d) $x^4 + 4 = 4x^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^4 - 4x^2 + 4 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x^2-2)^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left((x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\right)^2 = 0$. Also $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$.

Lösung zu Aufgabe 15.287 ex-textaufgaben-quadr-gleichung-repe

a) Wir suchen t so, dass $h(t) = 8$. Das ergibt eine Gleichung für t:

$$1 + 12t - 5t^2 = 8 \qquad | -1 - 12t + 6t^2$$
$$0 = 5t^2 - 12t + 7$$
$$t_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-140}}{10} = \frac{12 \pm 2}{10} = \frac{6 \pm 1}{5}$$

Damit erhalten wir zwei Lösungen $t_1 = 1$ und $t_2 = 1.4$. Die erste Lösung ist die gesuchte, die zweite Lösung ist der Zeitpunkt, zu der der Ball wieder auf die Höhe von 8 m zurückfallen würde, wenn die Decke nicht da wäre.

Die Funktion ist quadratisch, der Graph also eine Parabel mit Symmetrieachse parallel zur y-Achse. Der Scheitel muss also zwischen t_1 und t_2 (gleiche Höhe) liegen. Also $S = (1.2, h(1.2)) = (1.2, 8.2)$.

Alternativ kann der Scheitelpunkt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
h(t) &= -5\left(t^2 - \frac{12}{5}t - \frac{1}{5}\right) = \\
&= -5\left((t^2 - \frac{12}{5}t + \ + \left(-\frac{6}{5}\right)^2 - \left(-\frac{6}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\right) = \\
&= -5\left(t - \frac{6}{5})^2 - \left(\frac{6}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}\right) \\
&= -5\left(t - \frac{6}{5})^2\right) + \frac{36}{5} + 1 = \\
&= -5(t-1.2)^2 + 8.2
\end{aligned}$$

Woraus man die Scheitelpunktskoordinaten $S = (1.2, 8.2)$ ablesen kann.

Oder mit der Formel $\frac{-b}{2a} = \frac{-12}{-10} = 1.2$.

b) Die einfachste Variante ist, die Rechteckseiten mit den Längen $(1-x)$ und $(1+x)$ zu beschreiben. Die Fläche ist dann

$$F = (1+x)(1-x) = 1 - x^2$$

Die Fläche ist offensichtlich dann am grössten, wenn $x = 0$ ist.

Die komplizierte Variante ist wie folgt:

Sei l die Länge der einen Rechteckseite. Die andere Rechteckseite hat die Länge $\frac{U-2l}{2} = \frac{4-2l}{2} = 2 - l$. Die Fläche ist damit

$$F = l \cdot (2-l) == -l^2 + 2l$$

Die Fläche ist eine quadratische Funktion von l, also eine Parabel, die nach unten geöffnet ist (wegen dem $-l^2$). Das Maximum liegt also im Scheitel dieser Parabel, mit x-Koordinate $\frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1$.

Lösung zu Aufgabe 15.288 ex-tangenten-repe

a) Damit $P \in t$ muss $t\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ sein. Also

$$\begin{aligned} t\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}p - p^2 &= -\frac{1}{2} && \left| + \frac{1}{2}\right. \\ -p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} &= 0 && | \cdot (-2) \\ 2p^2 - p - 1 &= 0 \\ p_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

Damit lauten die Tangentengleichungen

$t_1(x) = 2x - 1$ für $p_1 = 1$ und

$t_2(x) = -x - \frac{1}{4}$ für $p_2 = -\frac{1}{2}$

b) Da die x-Koordinaten der Berührungspunkte bekannt sind, können die Geradengleichungen aufgeschrieben werden:

$t_1(x) = 2x - 1$ für $p = 1$ und $t_2(x) = 6x - 9$ für $p = 3$. Um zu überprüfen, dass diese Geraden auch Tangenten an g sind, überprüft man, ob die Gleichung $g(x) = t(x)$ genau eine Lösung hat:

Für $t_1(x) = g(x)$ also $2x - 1 = -(x^2 - 8x + 16) + 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 9 = 0$ Diskriminante $D = 36 - 36 = 0$, also ist t_1 auch einen Tangente an g. Die Lösung ist $x = 3$.

Für $t_2(x) = g(x)$ also $6x - 9 = -(x^2 - 8x + 16) + 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 0$. Auch diese Gleichung hat genau eine Lösung $x = 1$ womit auch t_2 eine Tangente an g ist.

Die Berührungspunkte sind $B_1 = (3, t_1(3)) = (3, 5)$ und $B_2 = (1, t_2(1)) = (1, -3)$.

c) Sei $P = (s, t)$ der Punkt unterhalb der Parabel (d.h. $t < s^2$). Die Tangenten durch diesen Punkt erfüllen die Gleichung

$$\begin{aligned} t(s) = t2ps - p^2 &= t && | - t && (1) \\ -p^2 + 2ps - t &= 0 && && (2) \\ p_{1,2} &= \frac{-2s \pm \sqrt{4s^2 - 4t}}{-2} = s \pm \sqrt{s^2 - t} && && (3) \\ & && && (4) \end{aligned}$$

Damit unterscheiden sich die beiden x-Koordinaten der Berühungspunkte um den gleichen Unterschied $\sqrt{s^2 - t}$ von s, was zu beweisen war.