

---

# Aufgabenkatalog

15.6.2017

---

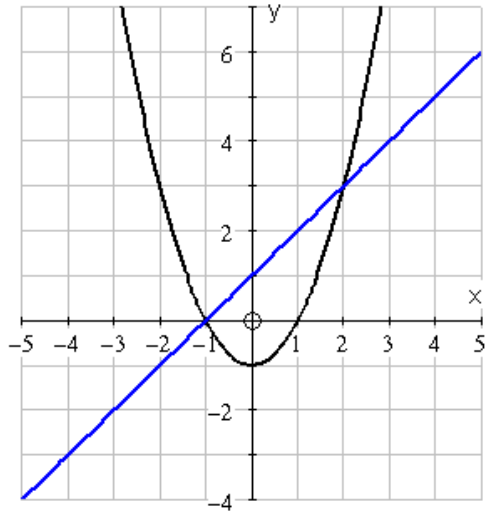
## Aufgabenübersicht

1	Integralrechnung: Schnittwinkel, Fläche	1
2	ExpoLog: Wachstum	2
3	Folgen und Reihen: Geometrische Folge, Geometrische Reihe	3
4	Differentialrechnung: Ableitung, Tangente, Integral	4
5	Stochastik: Bedingte Wahrscheinlichkeit	5
6	Integralrechnung: Rotationskörper	6
7	Differentialrechnung: Kurve bestimmen	7
8	Vektorgeometrie: Gerade, Winkel zwischen Geraden	8
9	ExpoLog: Exponentielles Wachstum	9
10	Vektorgeometrie: Ebene, Pyramide	10
11	Folgen und Reihen: Beispiel Folge	11
12	ExpoLog: Logarithmus, Logarithmengleichungen	12
13	ExpoLog: Logarithmus und Exponentialfunktion	13
14	Vektorgeometrie: Skalar- und Vektorprodukt	14
15	Folgen und Reihen: AF, AR, GF, GR	15
16	Differentialrechnung: Trigonometrische Funktionen	16
17	Stochastik: Binomialkoeffizient	17
18	Vektorgeometrie: 2D, Dreieck, Steigung, Richtungsvektor	18
19	Differentialrechnung: Ableitung der Exponentialfunktion, Integral	19
20	Vektorgeometrie: Dreieck, Vektorprodukt	20
21	Differentialrechnung: Ableitung der Exponentialfunktion, Integral	21
22	Vektorgeometrie: Gerade in der Ebene	22
23	Differentialrechnung: Kettenregel	23

24	Integralrechnung: Trigonom. Funktionen, Exponentialfunktion, GF und GR	24
25	Differentialrechnung: Differenzierbarkeit	25
26	Stochastik: Baumdiagramm, Binomialverteilung	26
27	Folgen und Reihen: GF, GR	27
28	Integralrechnung: Tangente, Fläche	28
29	Stochastik: Kombinatorik, Binomialkoeffizient	29
30	Integralrechnung: Uneigentliches Integral	30
31	Integralrechnung: Integral, ln	31
32	Integralrechnung: Integral, ln	32
33	Vektorgeometrie: Ebene	33
34	Vektorgeometrie: Ebene	34
35	ExpoLog: natürliche Exponentialfunktion	35
36	Differentialrechnung: Graphisch Ableiten, Kurvendiskussion	36
37	Stochastik: Kombinatorik	37
38	Vektorgeometrie: Ebene, Gerade	38
39	Folgen und Reihen: Sigma Notation, AF, AR	39
40	Differentialrechnung: Grundlagen, Regeln	40
41	Vektorgeometrie: 2D	41
42	Vektorgeometrie: Geraden	42
43	Folgen und Reihen: GR, GF	43
44	Integralrechnung: Trigonometrische Funktionen	44
45	Stochastik: Kombinatorik	45
46	Integralrechnung: Trigonometrische Funktionen, Rotationskörper	46
47	Vektorgeometrie: Ebenen	47
48	Folgen und Reihen: Vollständige Induktion	48
49	Folgen und Reihen: Vollständige Induktion	49
50	Zusatz S: Rotationskörper	50
51	Zusatz S: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	51
52	Zusatz S: Folgen und Reihen	52

**Aufgabenstellung**

Gegeben sind die zwei Funktionsgraphen:



- (a) Wie lauten die Funktionsgleichungen der abgebildeten Graphen?
- (b) Wie bestimmt man die Schnittpunkte?
- (c) Was versteht man unter dem Schnittwinkel der Graphen im Schnittpunkt  $(2/3)$  und wie müsste man diesen berechnen?
- (d) Wie berechnet man die Fläche zwischen den beiden Graphen?
- (e) Schnittwinkel mit Skalarprodukt, ohne Formel

<b>2</b>	<b>Wachstum</b>	<b>ExpoLog</b>
----------	-----------------	----------------

**Aufgabenstellung**

Gegeben sind zwei Exponentialfunktionen:

$$N(t) = 1000 \cdot 1.025^t$$

$$A(t) = 500 \cdot 0.81^t$$

- (a) Was kann man an den Funktionen erkennen, welche Information über das Wachstum können abgelesen werden?

Alltagsbeispiele?

- (b) Wie sehen Graphen von Exponentialfunktionen aus?

Anfangsbestand, Wachstum

- (c) Was versteht man unter Halbwertszeit? Wie würdest du diese berechnen?

- (d) Steigung der Funktion

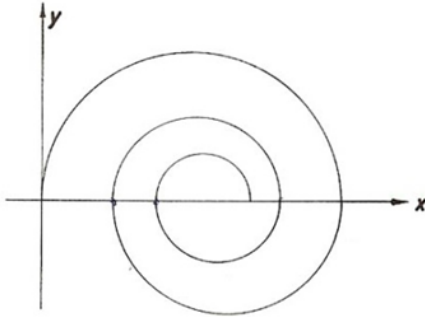
- (e) Folgen und Reihen: Exp. Zerfall von Dreiecksseiten: 10, 8, 6.4. Länge der 7. Dreiecksseite? Gesamtlänge?

**3 Geometrische Folge, Geometrische Reihe**

## Folgen und Reihen

**Aufgabenstellung**

Gegeben: Eine Spirale aus 1000 Halbkreisen, deren Durchmesser eine geometrische Folge mit dem Quotienten  $q = \frac{3}{4}$  bilden, wobei der erste Durchmesser  $d_1 = 100$  ist.



Was ist eine geometrische Folge? Definition? Eigenschaften?

- (a) Wie lang ist die Spirale?

Diskussion: Formel für die unendliche Summe?

Für welche  $q$  ist die Formel anwendbar? Warum?

Übergang von der endlichen Summenformel zur unendlichen Summenformel?

- (b) Um welchen Punkt herum windet sich die Spirale unendlich oft?

- (c) Berechne die Summe der ersten 100 Halbkreisflächen

4	Ableitung, Tangente, Integral	Differentialrechnung
---	-------------------------------	----------------------

**Aufgabenstellung**

Gegeben: Funktion  $f(x) = x^3 - x$ .

- (a) Wie sieht der Graph der Funktion aus (Nullstellen, Extremstellen, Wendepunkte)?

Kann man auch noch etwas zur Symmetrie und dem Verhalten im Unendlichen sagen?

- (b) Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkt  $P(3/y)$ ?

- (c) Jetzt soll im Wendepunkt die Normale zum Graphen gelegt werden. Wie findet man die Gleichung dieser Normalen?

- (d) Welche Fläche bilden Normale und Graph?

- (e) Wieso ist  $f'' = 0$  im Wendepunkt. (Hilfe: Betrachte  $f'$  und erkläre)

5	Bedingte Wahrscheinlichkeit	Stochastik
---	-----------------------------	------------

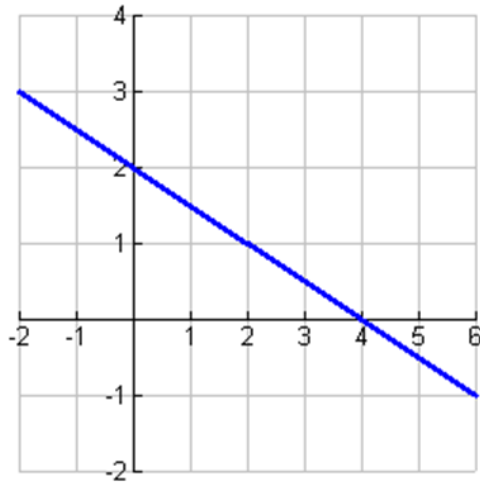
**Aufgabenstellung**

Hinter dem Haus steht ein ungespritzter Zwetschgenbaum mit sehr vielen Früchten. Aus Erfahrung weisst Du, dass eine zufällig ausgewählte Zwetschge mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.4 ohne Wurm ist.

- (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es bei fünf gepflückten Zwetschgen kein Wurm drin?
- (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens eine Zwetschge ohne Wurm dabei?
- (c) Wie viele Zwetschgen musst Du pflücken, damit mit einer Wahrscheinlichkeit  $\geq 0.99$  mindestens eine Zwetschge ohne Wurm dabei ist?
- (d) Ihr jasst in der Pause. Ihr jasst in der Pause. Du erhältst 9 der 36 Karten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindesten 3 Asse dabei sind?

**6 Rotationskörper****Integralrechnung****Aufgabenstellung**

Gegeben ist der Graph einer Geraden.



- (a) Wie lautet die Funktionsgleichung dieser Geraden?
- (b) Wie berechnet man das Volumen des Rotationskörpers allgemein? (als Rotationsvolumen)

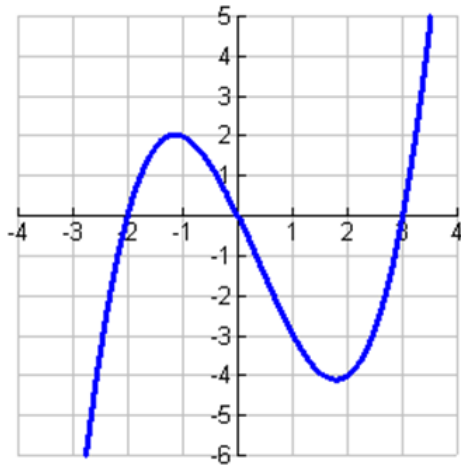
Wie kommt das Pi in die Formel?

- (c) Die Gerade in der Abbildung rotiert um x-Achse. Zeige, dass die Berechnung mit Integral das Gleiche liefert, wie die Formel für das Kegelvolumen.
- (d) Skizziere die nach unten geöffnete Parabel einer quadratischen Funktion durch die beiden Achsenabschnittpunkte mit Scheitelpunkt bei  $(0/2)$ .  
Wie lautet die Funktionsgleichung?
- (e) Wie gross ist das Volumen des Rotationskörpers?
- (f) Wie würdest du die Schnittwinkel der beiden bestimmen?



**7****Kurve bestimmen****Differentialrechnung****Aufgabenstellung**

Gegeben ist der Graph einer Funktion  $f$ .



- (a) Wie lautet eine mögliche Funktionsgleichung?

Streckungsfaktor  $a = 1$ ? Abschätzen, ob das passen könnte? (in Wahrheit  $a = \frac{1}{2}$ )

- (b) Was muss man sich unter der Steigung eines Graphen an einer Stelle vorstellen? Wie ist die Tangente eigentlich definiert?

Tangente bei  $x = 1$ ?

- (c) Was bedeutet es, wenn die zweite Ableitung eines Graphen 0 ist? Wie sieht der dann aus?

Wie sieht er aus, wenn die 2. Ableitung positiv ist?

- (d) Skizzieren den Graphen der ersten Ableitung in das Diagramm. Skizziere auch den Graphen der zweiten Ableitung.

## 8

## Gerade, Winkel zwischen Geraden

## Vektorgeometrie

## Aufgabenstellung

Gegeben ist die Gerade  $g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

und die Punkte  $A(-1/2/1)$  und  $B(3/4/-7)$ .

- (a) Wie prüft man, ob  $A$  und/oder  $B$  auf der Geraden liegen?

Wie sieht man, ob AB eine Gerade ist, die ev. parallel oder senkrecht zu  $g$  verläuft?

- (b) Jetzt sucht man den Punkt  $P$  auf  $g$ , der von  $A$  und  $B$  gleich weit entfernt ist. Wie geht man dabei vor?

- (c) Wie bestimmt man den Winkel zwischen zwei Geraden?

Zwischen AP und g?

- (d)  $g$  und  $A$  definieren eine Ebene. Ebenengleichung? Abstand von B von E?

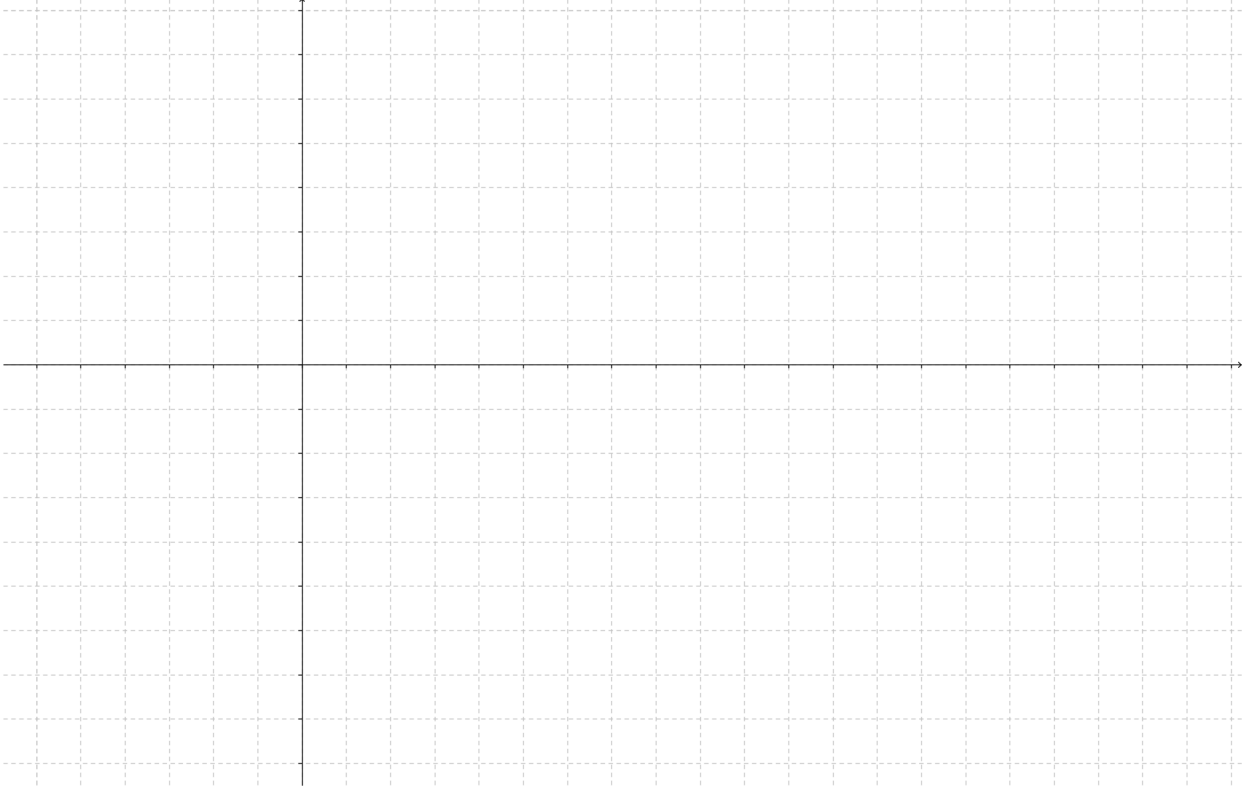
**9****Exponentielles Wachstum**

ExpoLog

**Aufgabenstellung**

Die Erdbevölkerung betrug 1960 3.0 Milliarden, 1988 5.2 Milliarden. Die Bevölkerungszahl nehme exponentiell zu.

- (a) Skizziere den Graphen einer Exponentialfunktion



Wie sieht die allgemeine Funktionsgleichung aus? Welche Bedeutung haben die Parameter

- (b) Wie gross ist die jährliche Zunahme an Menschen auf der Erde in obiger Situation?  
(c) Wie viele Menschen werden im Jahr 2020 die Erde bevölkern?

9.75 Mia

- (d) In welchem Jahr wird, bei gleichem Wachstum, die Erdbevölkerung über 15 Milliarden betragen?

2042 (nach 81.93 Jahren)

- (e) Zeichne die Funktion  $f : y = e^x$ . Eigenschaften? Ableitung? Umkehrfunktion?

10	Ebene, Pyramide	Vektorgeometrie
----	-----------------	-----------------

**Aufgabenstellung**

Gegeben sind die Punkte  $A(2/2/1)$ ,  $B(0/1/1)$  und  $S(1/2/3)$  von einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche ABCD und Spitze  $S$ . Die Grundfläche liegt in der Ebene  $E : x - 2y + 2z = 0$ .

- (a) Wie weist man nach, dass  $A$  und  $B$  in der Ebene liegen?
- (b) Bestimme das Volumen der Pyramide.
- (c) Wie könnte man die beiden fehlenden Ecken bestimmen.

Kreuzprodukt von Normalvektor und Verbindungsvektor  $\vec{AB}$ , dann auf gleiche Länge skalieren.

- (d) Winkel zwischen AB und AS?

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

- (e) Angenommen  $S$  würde mittig über der quadratischen Grundfläche liegen. Wie könntest du Mittelpunkt und Radius der Inkugel bestimmen?

<b>11</b>	<b>Beispiel Folge</b>	Folgen und Reihen
-----------	-----------------------	-------------------

**Aufgabenstellung**

Betrachte die Folge 8, 12, 18, 27,...

- (a) Welche Art Folge liegt hier vor?

Wie lautet die Definition, rekursiv, explizit..?

- (b) Vom wievielten Glied an sind alle Glieder grösser als 50'000?

- (c) Wie viele Glieder muss man mindestens zusammenzählen, sodass die Summe mindestens 50'000 beträgt? Formel, Wie nennt man die Folge der Partialsummen?

- (d) Wie sieht es mit der Summe aller Glieder aus? Was muss gelten, damit die Summe endlich bleibt? Warum? Herleitung.

**12** Logarithmus, Logarithmengleichungen

ExpoLog

**Aufgabenstellung**

Was weißt du über den Logarithmus?

- (a) Definition, Rechenregeln, verschiedene Basen?
- (b) Welche Methoden zur Lösung von Logarithmengleichungen kennst du? Welche der Rechenregeln kann man anwenden?

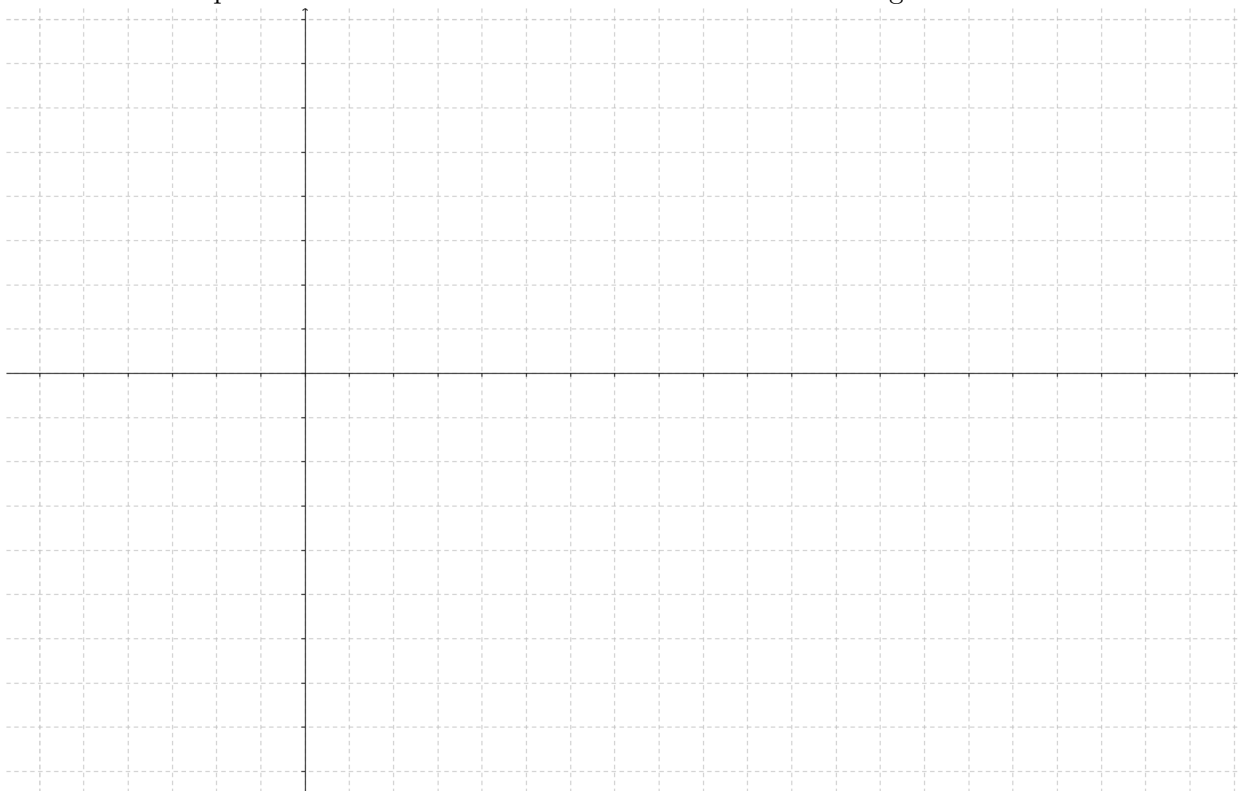
$$\ln(x) + \ln(2) = 3$$

$$\log_2 x = \log_3 x - 4$$

- (c) Wo kommen logarithmische Skalen in wissenschaftlichen Anwendungen vor? Nenne ein Beispiel!

Z.B. Richter Skala (Erdbeben), Lautstärke dB und Geräuschintensität.

- (d) Skizziere die Exponentialfunktion zur Basis  $e$  und die natürliche Logarithmusfunktion.



**13** Logarithmus und Exponentialfunktion

ExpoLog

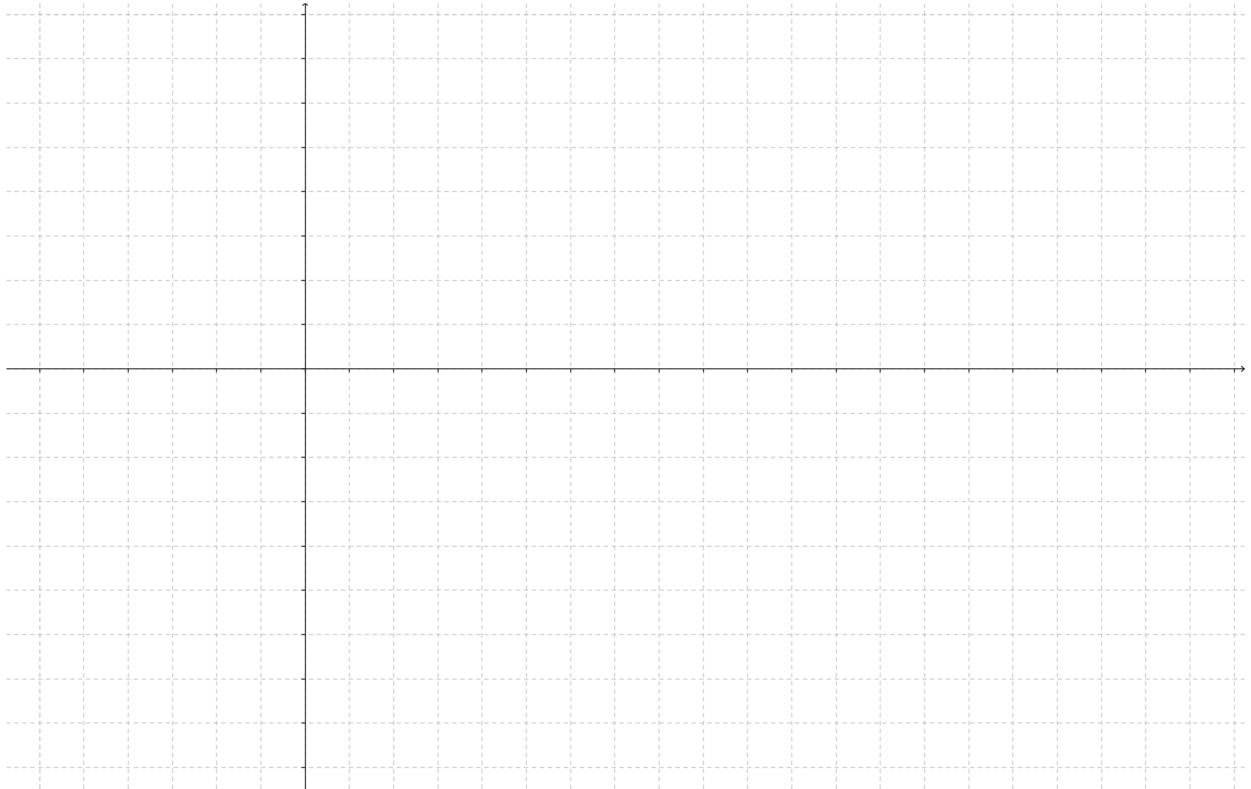
**Aufgabenstellung**

Was weisst du über den Logarithmus?

- (a) Definition, Rechenregeln, verschiedene Basen?
- (b) Wo kommen Logarithmische Skalen in wissenschaftlichen Anwendungen vor? Nenne ein Beispiel!

Z.B. Richter Skala (Erdbeben), Lautstärke dB und Geräuschintensität.

- (c) Skizziere die Exponentialfunktion zur Basis  $e$  und die natürliche Logarithmusfunktion.



- (d) Die Erdbevölkerung betrug 1960 3.0 Milliarden, 1988 5.2 Milliarden. Die Bevölkerungszahl nehme exponentiell zu.  
Wie gross ist die jährliche Zunahme an Menschen auf der Erde in obiger Situation?  
Wie viele Menschen werden im Jahr 2020 die Erde bevölkern?

<b>14</b>	<b>Skalar- und Vektorprodukt</b>	Vektorgeometrie
-----------	----------------------------------	-----------------

**Aufgabenstellung**

Das Dreieck ABC mit  $A(7/-3/1)$ ,  $B(2/0/5)$  und  $C(9/-3/1)$  ist gegeben.

- (a) Berechne den Winkel  $\alpha$  in obigem Dreieck.

Wie lautet die benutzte Formel, wie berechnet man das Skalarprodukt.

- (b) Berechne den Flächeninhalt des obigen Dreiecks.

Wie gehst du vor?

$$|\vec{a} \times \vec{b}|/2$$

oder mit Sinus

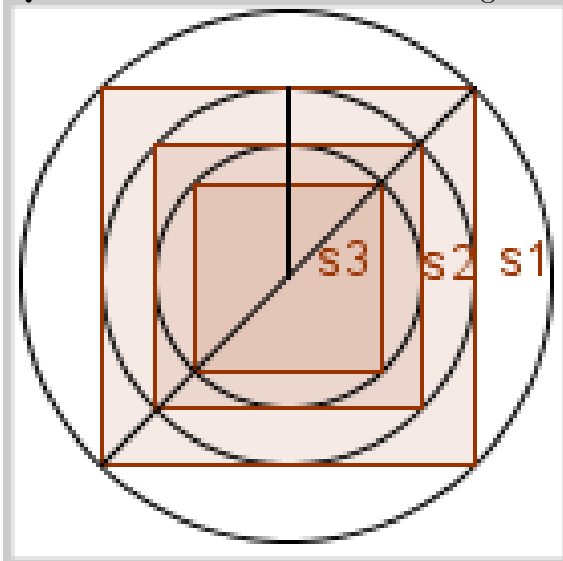
- (c) Bestimme die Spitze der Pyramide über dem Flächenschwerpunkt. Pyramidenhöhe  $h = 10$ .



**15****AF, AR, GF, GR****Folgen und Reihen****Aufgabenstellung**

Zahlenfolge 70, 74, 78, 82, ...

- (a) Um was für eine Folge handelt es sich hier?
- (b) Wie können solche Folgen algebraisch beschrieben werden? (explizit und rekursiv? Unterschied?)
- (c) Wenn man nun die ersten 20 dieser Folgenglieder aufaddiert, welchen Wert erhält man dann?
- (d) Kannst du eine geometrische Folge angeben? Wie lautet hier die Definition?
- (e) Wie lauten die Summenformeln für Reihen?
- (f) Warum gibt es keine Summenformel für unendliche arithmetische Reihen?
- (g) Gegeben ist ein Kreis mit Radius 1. Diesem wird ein Quadrat einbeschrieben, dem Quadrat wieder ein Kreis usw.. Wie gross ist die Summe aller Quadratsummen?

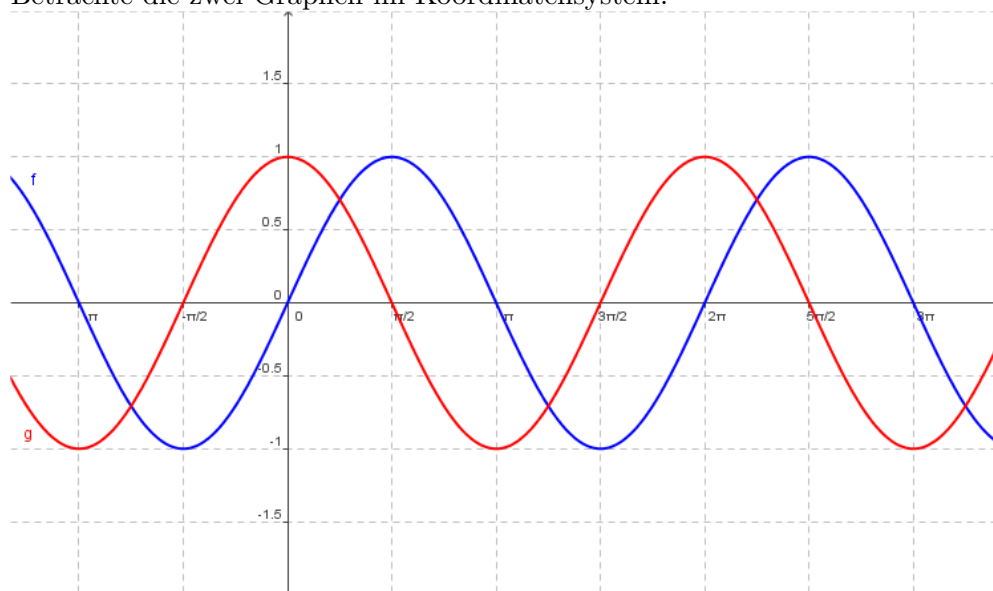


**16** Trigonometrische Funktionen

## Differentialrechnung

**Aufgabenstellung**

Betrachte die zwei Graphen im Koordinatensystem.



(a) Wie lauten die Funktionsgleichungen der beiden Graphen?

(b) Begründe anhand der Graphen:

$$\sin(x)' = \cos(x)$$

(c) Wie sieht der Graph von

$$\sin(x)''$$

aus?

(d) Berechne die 1. und 2. Ableitung der Funktion  $f(x) = \tan(x)$

(e) Fläche zwischen den Graphen?

(f) Graph von  $\sin(2x)$  und  $\sin(2x)'$

17	Binomialkoeffizient	Stochastik
----	---------------------	------------

**Aufgabenstellung**

Betrachte den Binomialkoeffizienten  $\binom{8}{3}$

- (a) Was bedeutet dieser Term?

Er gibt an, auf wie viele verschiedene Arten man k Objekte aus einer Menge von n verschiedenen Objekten auswählen kann (ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge).

- (b) Berechne ihn.

$$\begin{aligned}\binom{8}{3} &= \frac{8!}{3!(8-3)!} \\ &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 56\end{aligned}$$

- (c) Von 15 Autofahrern haben 5 ihre Einkäufe nicht deklariert, sind also Schmuggler. Zwei von den 15 werden zufällig ausgewählt und überprüft. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Schmuggler erwischt werden?

$$\frac{\binom{5}{2}}{\binom{15}{2}} = \frac{10}{3003}$$

$$= 0.\overline{3}\%$$

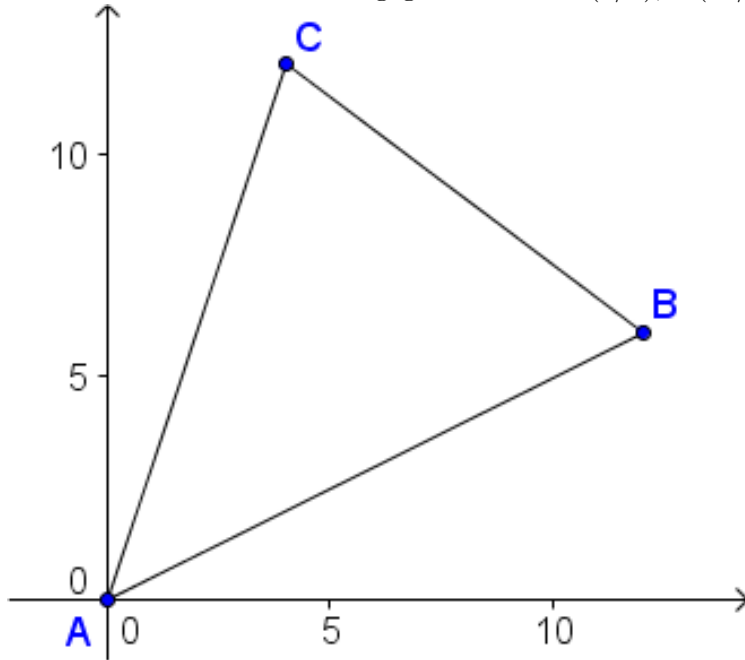
- (d) Max und Moritz werfen abwechselungsweise auf einen alten Blumentopf. Jeder wirft zweimal. Max beginnt. Max zerstört den Blumentopf bei einem Wurf mit 20% Wahrscheinlichkeit, Moritz mit 30%. Wie gross ist die 'Überlebenschance' des Topfes bei diesem Spiel?
- (e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Max/Moritz den Blumentopf zerstört?
- (f) Die beiden werfen, bis der Blumentopf getroffen wird. Welcher der beiden hat die grösseren Gewinnchancen?

**18** 2D, Dreieck, Steigung, Richtungsvektor

## Vektorgeometrie

**Aufgabenstellung**

Betrachte das Dreieck  $ABC$  gegeben durch  $A(0/0)$ ,  $B(12/6)$  und  $C(4/12)$ .



- (a) Wie kann man allgemein überprüfen, ob zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen?
- (b) Wie kann man in 2D zu einem gegebenen Vektor direkt einen dazu senkrechten angeben?

Begründe negativ reziprok. Geht das auch in 3D, wieso nicht?

- (c) Berechne den Höhenschnittpunkt  $H$  des Dreiecks  $ABC$ .

Wie lautet der Zusammenhang zwischen Steigung und Richtungsvektor.

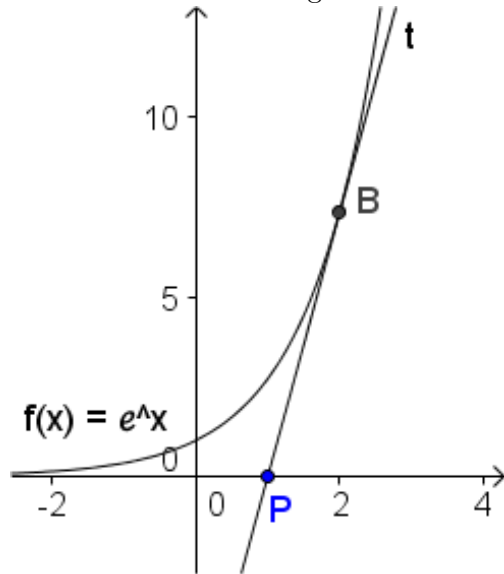
- (d) Wie könnte man den Inkreismittelpunkt bestimmen? HNF? Winkelhalbierende?

**19** Ableitung der Exponentialfunktion, Integral

## Differentialrechnung

**Aufgabenstellung**

Wir betrachten die Tangente vom Punkt  $P(1/0)$  aus an den Graphen der Funktion  $f : y = e^x$ .



- (a) Begründe, wieso die Tangente die Kurve an der Stelle  $x = 2$  berührt.

Wie könntest du diesen berechnen?

- (b) Berechne die Fläche zwischen der Kurve  $f$ , der Tangente  $t$  und der  $x$ -Achse.
- (c) Rotationsvolumen um  $x$ -Achse.
- (d) Berechne den Berührungspunkt von  $(3/0)$  aus.

20	Dreieck, Vektorprodukt	Vektorgeometrie
----	------------------------	-----------------

**Aufgabenstellung**

Gegeben sind drei Punkte  $A(5/1/2)$ ,  $B(2/4/2)$  und  $C(-1/1/2)$ .

- (a) Bilden die drei Punkte ein Dreieck?

Ist es ein rechtwinkliges Dreieck?

- (b) Wie gross ist die Fläche?

Zwei Varianten, eine mit Vektorprodukt.

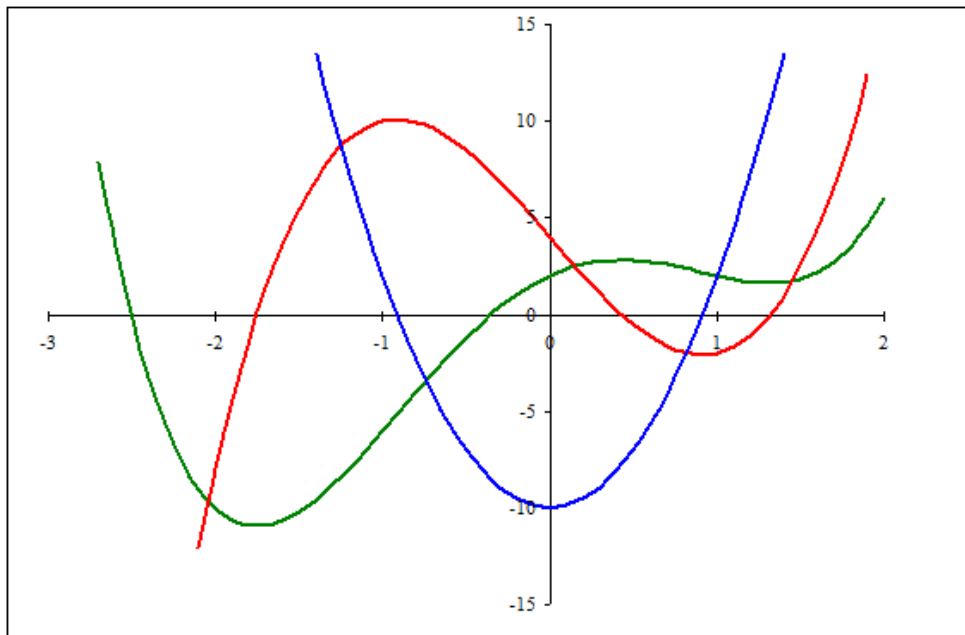
- (c) Wie findet man den Schwerpunkt  $S$  des Dreiecks?

- (d) Pyramidenspitze über  $S$  mit Höhe  $h = 36$

- (e) Wie fände man Inkreis der Pyramide bei Grundfläche als gleichseitiges Dreieck und Spitze über Schwerpunkt?

**21** Ableitung der Exponentialfunktion, Integral

## Differentialrechnung

**Aufgabenstellung**

- (a) Welches ist die Ausgangsfunktion, welche ihre 1. Ableitung und welches ihre 2. Ableitung? Erkläre anhand der Graphen.
- (b) Welche Bedingungen muss ein Wendepunkt erfüllen? Erkläre anhand der Graphen.
- (c) Die Ausgangsfunktion ist ein Polynom, kannst du etwas zum Grad des Polynoms sagen? Wie könnte man das vorliegende Polynom aus den Graphen bestimmen?

- (d) Die Ausgangsfunktion hat die Funktionsgleichung

$$f : y = x^4 - 5x^2 + 4x + 2.$$

An welchen Stellen beträgt die Steigung  $m = 4$ ?

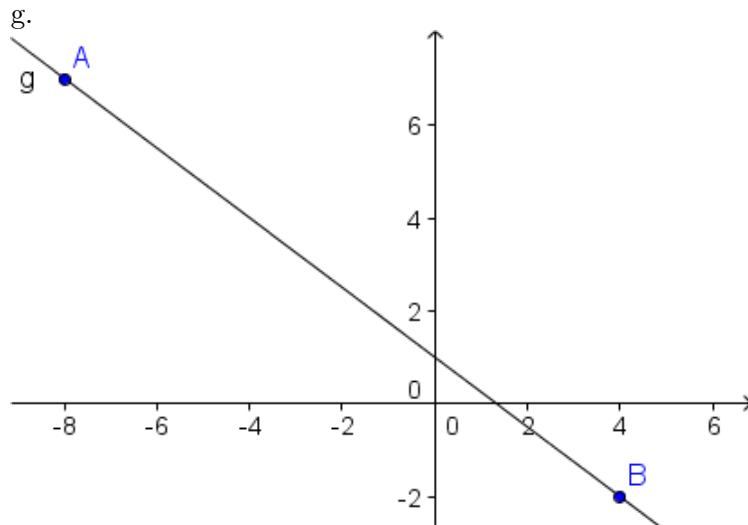
zeichnerisch/rechnerisch, Tangenten bestimmen.

- (e) Tangentengleichung bei  $x = 0$ , Fläche zwischen Tangente und Graph, Rotationsfläche

<b>22</b>	<b>Gerade in der Ebene</b>	<b>Vektorgeometrie</b>
-----------	----------------------------	------------------------

**Aufgabenstellung**

Gegeben sind zwei Punkte  $A(-8/7)$  und  $B(4/-2)$ . Diese beiden Punkte liegen auf der Geraden



- (a) Welche Darstellungsarten für die Gleichung der Geraden  $g$  gibt es?
- (b) Stelle die Parameterdarstellung der Geraden  $g$  auf.
- (c) Erkläre stichwortartig, wie man die explizite Form der Geraden  $g$  berechnet. Erkläre stichwortartig, wie man die Koordinatengleichung der Geraden  $g$  berechnet.
- (d) Betrachte den Punkt  $Q(-2/5)$ . Welcher Punkt  $P$  auf der Geraden hat den kürzesten Abstand zum Punkt  $Q$ ?

Sowohl geometrisch: Normale  $n$  zu  $g$  durch  $Q$ , wie auch analytisch: Ansatz für  $P$  aus Parameterdarstellung und Differenzialrechnung.

- (e) Gehen wir noch kurz zu 3D: Wie entscheidet man für zwei Geraden in welcher Lage sie zueinander stehen?



**23 Kettenregel****Differentialrechnung****Aufgabenstellung**

Gegeben sind die Funktionen:

Kind  $x \xrightarrow{\text{Mutter von}} \text{Mutter } m(x)$

Kind  $x \xrightarrow{\text{Vater von}} \text{Vater } v(x)$

- (a) Was sind dann  $m(v(x))$ ?  $v(m(x))$ ?  $v(m(v(x)))$ ?

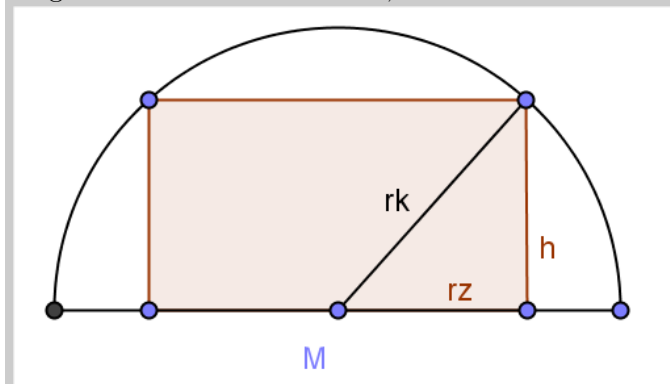
Kringel Notation?

- (b) Gib ein eigene Beispiele von Verkettungen von Funktionen an. Was ist die innere/äussere Funktion?
- (c) Wie lautet die Kettenregel?
- (d) Leite dein(e) Beispiel(e) ab.

- (e) Ableiten von  $f(x) = \sin \sqrt{x^2 + 2x}$ . Evtl. quadriert

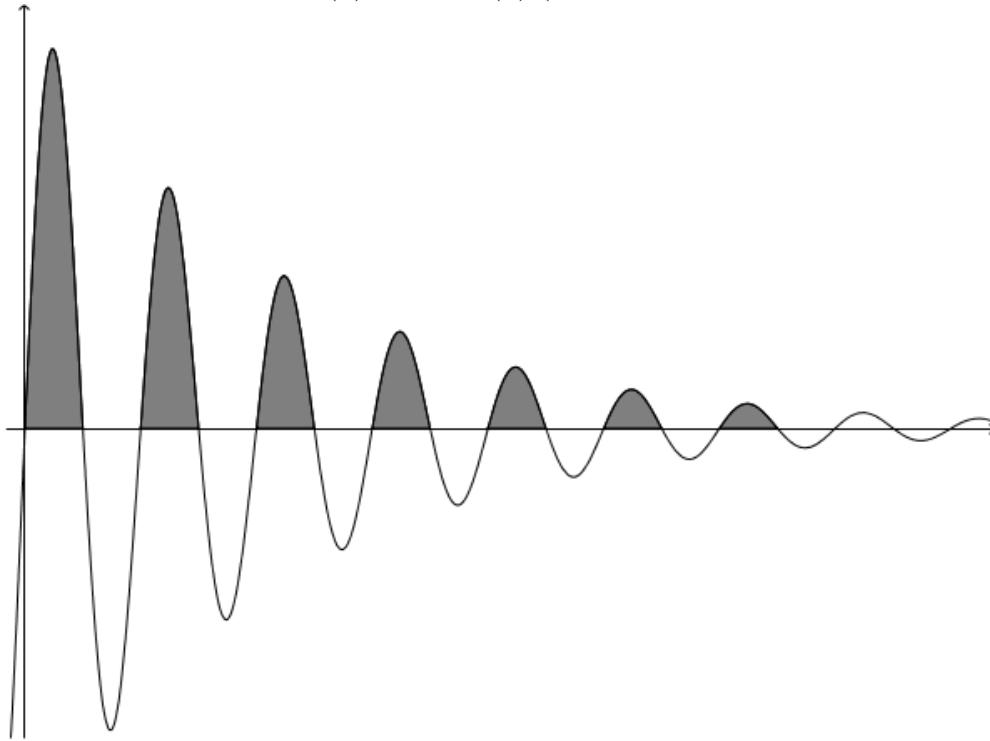
- (f) Wie leitet man eine dreifach verkettete Funktion ab?

- (g) Geg: Halbkreis mit Radius R, Ges: Rechteck mit maximaler Fläche.



**24****Trigonometrie, Funktionen, Exponentialfunktion, GF und GR****Integralrechnung****Aufgabenstellung**

Betrachte die Funktion  $f(x) = e^{-x} \sin(x)$  (die Darstellung ist nicht massstabsgetreu).



(a) Zeige

$$\int e^{-x} \sin x dx = (-\sin x - \cos x) \cdot \frac{1}{2} e^{-x} + C$$

(b) Berechne die ersten 3 schattierten Flächen  $F_1$ ,  $F_2$  und  $F_3$ .

(c) Bilden diese Flächeninhalte eine geometrische oder arithmetische Folge?

Kurze Diskussion über Unterschiede

(d) Berechne die Summe der ersten 7 Flächeninhalte.

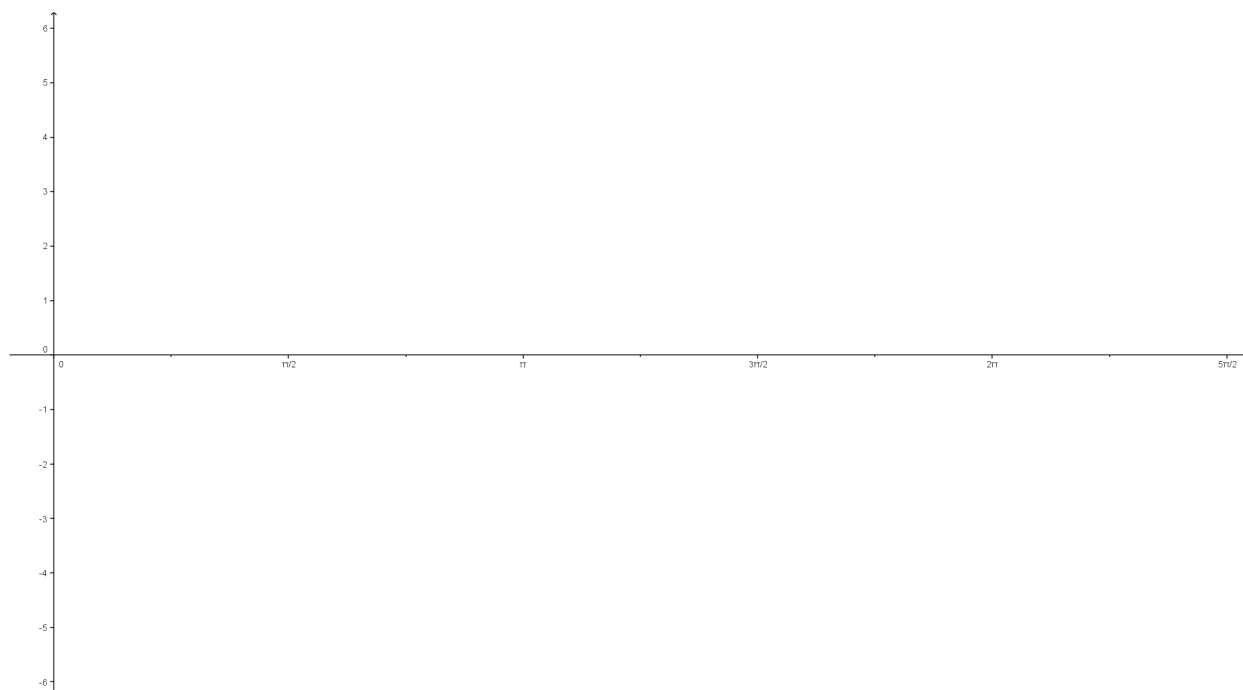
(e) Berechne die Summe aller Flächeninhalte.

(f) Wie viele Flächeninhalte müssen addiert werden, damit 99.9999% der gesamten Fläche erreicht werden? (von Hand auflösen)

**25****Differenzierbarkeit****Differentialrechnung****Aufgabenstellung**

Betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \sin(x) & \text{für } x < \frac{\pi}{6} \\ 6 \cdot \cos(2x) + b & \text{für } x \geq \frac{\pi}{6} \end{cases}$$



- (a) Welchen Einfluss haben die Parameter a und b auf die Graphen? Wie sehen die beiden Funktionen aus?
- (b) Bestimme a und b so, dass die Funktion in der ganzen Definitionsmenge differenzierbar ist.

Bedingungen für Differenzierbarkeit?

- (c) Fläche bestimmen

<b>26</b>	<b>Baumdiagramm, Binomialverteilung</b>	Stochastik
-----------	---	------------

**Aufgabenstellung**

Ein Basketballspieler trifft den Korb bei einem Strafwurf durchschnittlich in vier von fünf Fällen. Er erhält in einem Spiel 3 Strafwürfe zugesprochen.

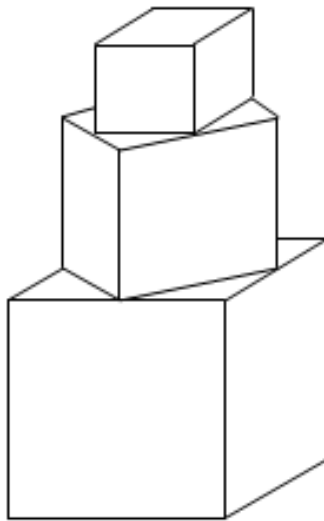
- (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er mindestens 1 Treffer? Baumdiagramm?
- (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er genau zwei Mal?
- (c) Bei 15 Würfen: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er genau 9 mal trifft?  
Allg. Formel erklären.
- (d) Wie berechnet sich ein Binomialkoeffizient.
- (e) Wahrscheinlichkeit, dass er höchstens 6 Mal trifft?

**27** GF, GR

Folgen und Reihen

**Aufgabenstellung**

Einem Würfel mit Kantenlänge 1 m wird ein zweiter Würfel so aufgesetzt, dass die Ecken der Grundfläche des zweiten Würfels auf die Kantenmitten der Deckfläche des ersten Würfels zu liegen kommen. Auf gleiche Weise wird dem zweiten ein dritter aufgesetzt etc.



- (a) Was ist eine geometrische Folge? Definition? Eigenschaften?

implizit, rekursiv

- (b) Wie hoch wird ein Turm aus 10 Würfeln?

- (c) Wie viele Würfel sind notwendig, wenn eine Höhe von 2.5m erreicht werden soll?

- (d) Welche Höhe erreicht der Turm maximal?

- (e) Diskussion: Formel für die unendliche Summe? Für welche  $q$ ? Herleitung usw.

- (f) Welches Volumen hat dieser Turm?

**28** Tangente, Fläche

## Integralrechnung

**Aufgabenstellung**

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \sqrt{x}$ .



- (a) Wie sieht der Graph der Funktion qualitativ aus?
- (b) Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkt  $P(1/y_P)$ ?
- (c) Welche Fläche bildet die Tangente mit dem Graphen im ersten Quadranten?
- (d) Wie gross ist das Rotationsvolumen dieser Fläche? Wieso  $\pi$  in der Formel?

29	Kombinatorik, Binomialkoeffizient	Stochastik
----	-----------------------------------	------------

**Aufgabenstellung**

Bei der mündlichen Mathematik-Matura werden an einem Morgen 12 Kandidatinnen und Kandidaten geprüft. Dabei werden drei 4-er-Gruppen gebildet.

- (a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus den 12 Kandidatinnen und Kandidaten 4-er-Gruppen zu bilden?

Erkläre den Term  $\binom{n}{k}$ . 4 aus 12: Wie berechnet sich der Binomialkoeffizient. Wieviele Varianten gibts, wenn die Reihenfolge von Bedeutung ist?

- (b) Für die Prüfung stehen 12 Couvert zur Verfügung. Nur in einem Couvert befindet sich das Thema Stochastik, welches von allen Kandidatinnen und Kandidaten erhofft wird. Wie sieht es mit den Chancen aus, das Thema zu wählen? Würdest du eher zuerst antreten wollen, oder eher am Schluss?

- (c) Beim Deutsch-Aufsatz der Matura stehen 3 Themen zur Auswahl, welche die 12 Kandidatinnen und Kandidaten alle gleich stark ansprechen.

Wie gross ist die W'keit, dass niemand Thema 1 wählt?

Wie gross ist die W'keit, dass genau 4 Thema 2 wählen?

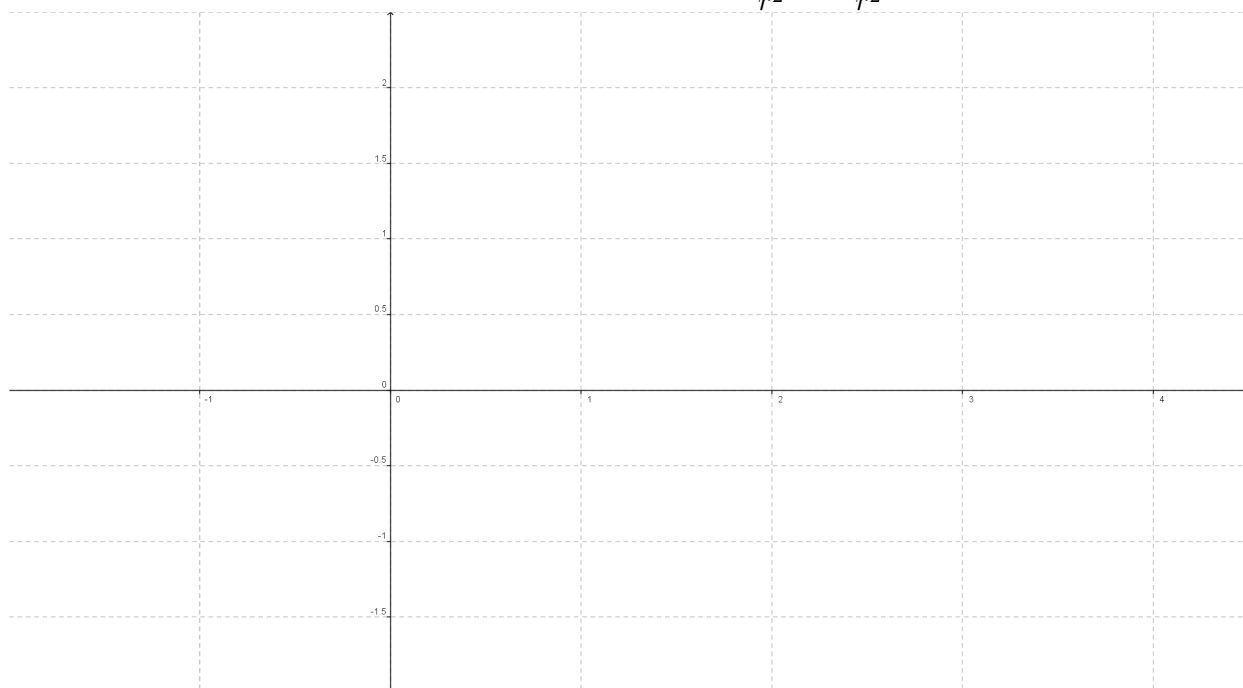
Wie gross ist die W'keit, dass mind. 2 Thema 3 wählen?

**30** Uneigentliches Integral

## Integralrechnung

**Aufgabenstellung**

Du kennst das Gravitationsgesetz von Newton:  $F_G = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = \frac{c}{r^2}$ .



- (a) Zeichne qualitativ den Graphen dieser Funktion im Bereich  $r > 0$
- (b) Welche Arbeit ist notwendig, um eine Rakete ( $m = \text{konstant}$ ) von der Erde ins Unendliche zu befördern?

Hilfe (falls nötig): Was ist Arbeit? Skizze zur Situation. Hinweis: Integral der Kraft über den Weg

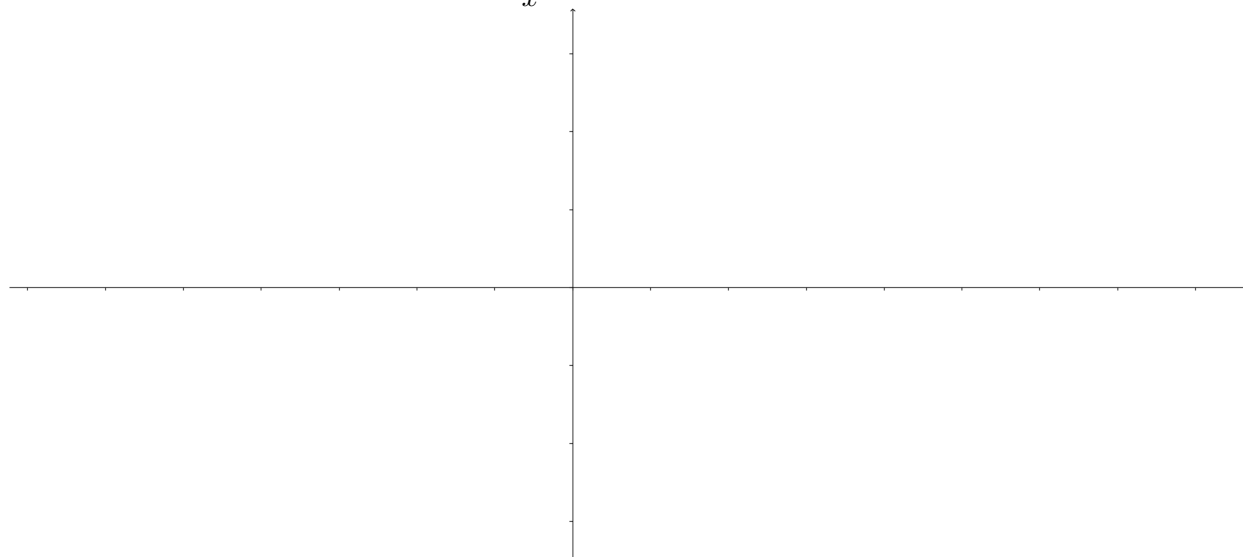
- (c) Tangentengleichung im Punkt  $(r_0/f(r_0))$
- (d) Maximale Fläche des Dreiecks, gebildet durch die Achsen und die Tangente?



<b>31</b>	<b>Integral, ln</b>	<b>Integralrechnung</b>
-----------	---------------------	-------------------------

**Aufgabenstellung**

Zeichne den Graphen der Funktion  $y = \frac{1}{x}$ .



(a) Zeige, dass die beiden Flächen in den Intervallen  $[1, p]$  und  $[q, pq]$  den gleichen Inhalt haben.

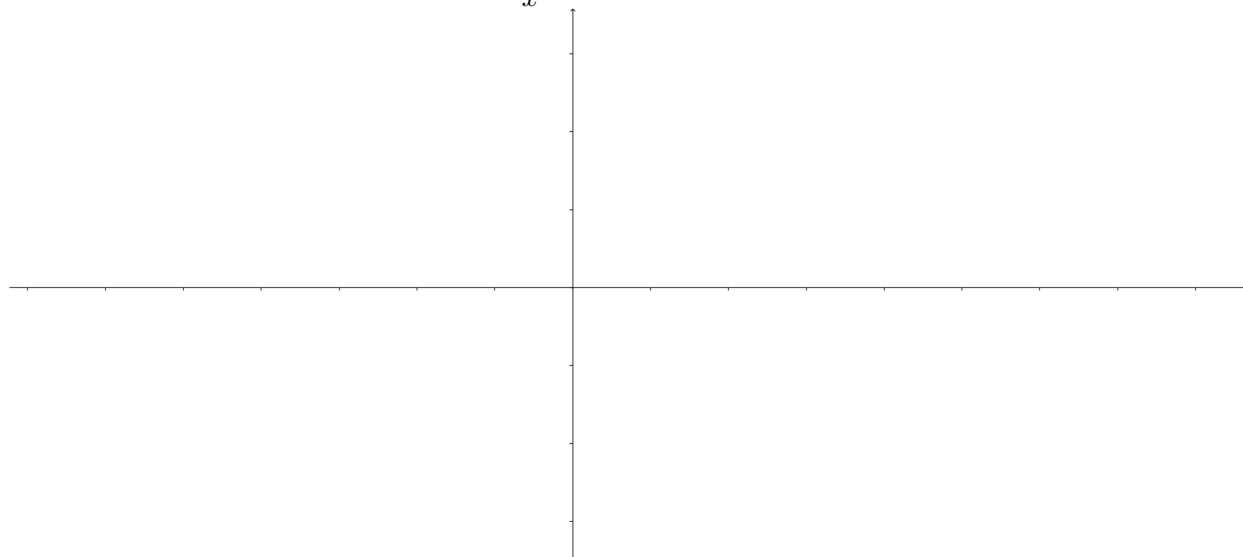
(b) Ist das Integral  $\int_1^\infty \frac{1}{x}$  definiert?

Woher kommt das Integral überhaupt? Wie definiert? Wann existiert das uneigentliche Integral?

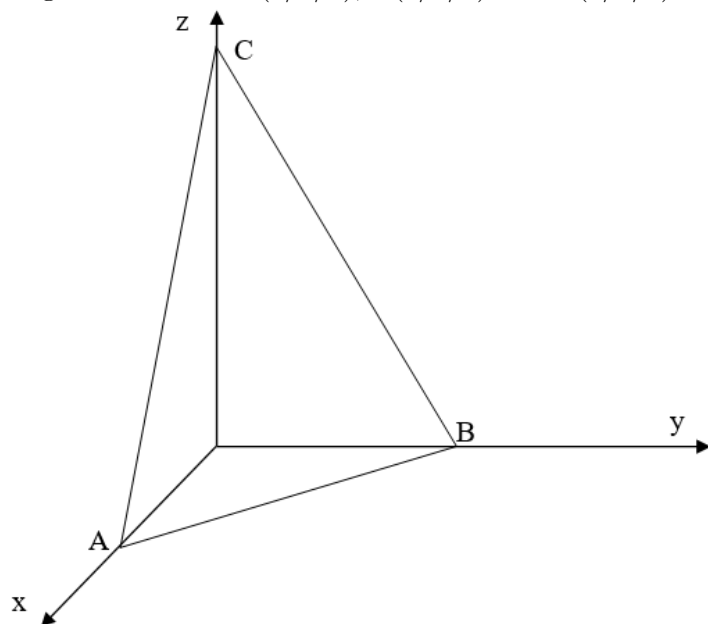
(c) Zeige, dass die harmonische Reihe  $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$  divergiert.

**32****Integral, ln****Integralrechnung****Aufgabenstellung**

Zeichne den Graphen der Funktion  $y = \frac{1}{x}$ .



- (a) Zeige, dass die beiden Flächen in den Intervallen  $[1, p]$  und  $[q, pq]$  den gleichen Inhalt haben.
- (b) Was weißt du über den Logarithmus? (Definition, Rechenregeln, verschiedene Basen?)
- (c) Wie sieht es mit dem Rotationsvolumen aus?
- (d) Erkläre die Formel für das Rotationsvolumen.

**33****Ebene****Vektorgeometrie****Aufgabenstellung**Gegeben: Punkte  $A(3/0/0)$ ,  $B(0/3/0)$  und  $C(0/0/6)$ 

- (a) Bestimme den Schwerpunkt des Dreiecks  $ABC$ .

Herleitung der Formel

- (b) Wie lautet die Gleichung der Ebene  $ABC$ ?

Achsenabschnittsform?

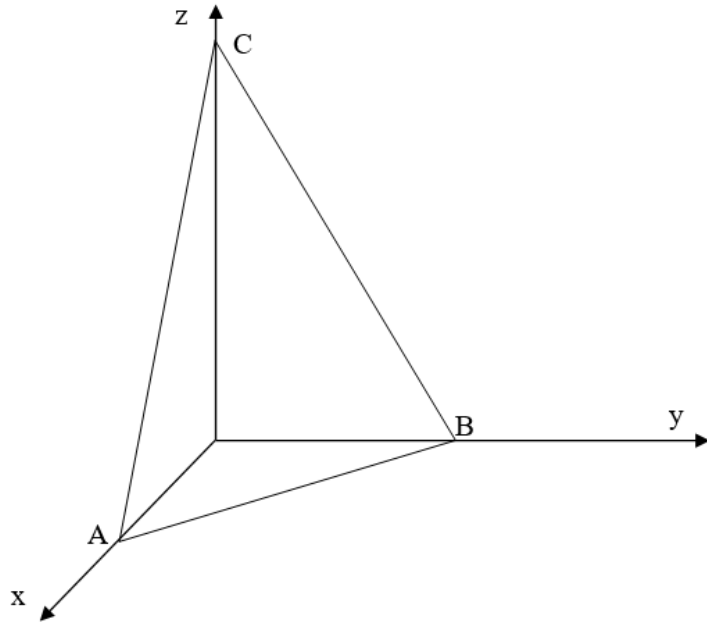
- (c) Wie könnte man Mittelpunkt und Radius der Inkugel bestimmen?

- (d) Wie lautet die Fläche des Dreiecks? Beide Arten zum Berechnen angeben.

- (e) Wie berechnet man ein Vektorprodukt.

**34****Ebene****Vektorgeometrie****Aufgabenstellung**

Gegeben ist die Ebene  $E$  (siehe Abbildung)



- (a) Gib eine mögliche Gleichung der Ebene  $E$  an.

Welche andere Darstellungsform kennst du?

- (b) Bestimme den Abstand des Punktes  $P(5/4/3)$ ?

HNF, wie ohne? Herleitung?

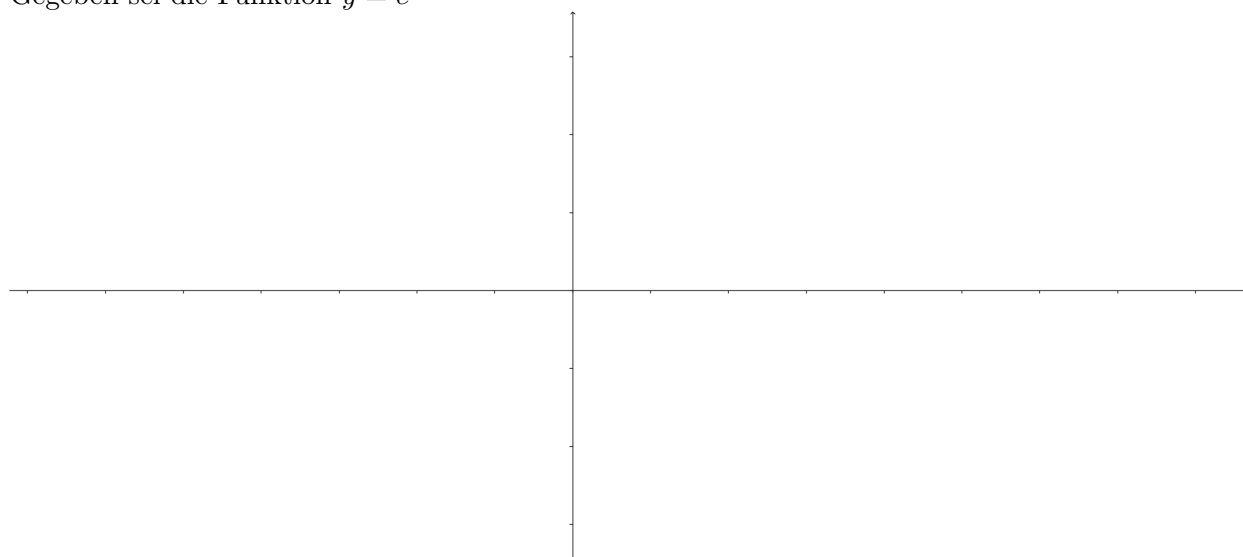
- (c)  $Q(-10/8/11)$  von  $P$  aus sichtbar?

Begründung?

- (d) Schnittgerade mit Ebene  $F : 3x - 4y + 2z + 3 = 0$

**35** natürliche Exponentialfunktion

ExpoLog

**Aufgabenstellung**Gegeben sei die Funktion  $y = e^x$ 

- (a) Skizziere den Graphen dieser Funktion. Welche Eigenschaften hat diese Funktion?

steigend, fallen, nullstellen usw.

- (b) Woher kommt die Zahl  $e$ ?

- (c) Wie lautet die Umkehrfunktion?

- (d) Definition vom Logarithmus?

$$\ln \frac{1}{e^2}$$

Graph von  $y = e^{\ln(x)}$

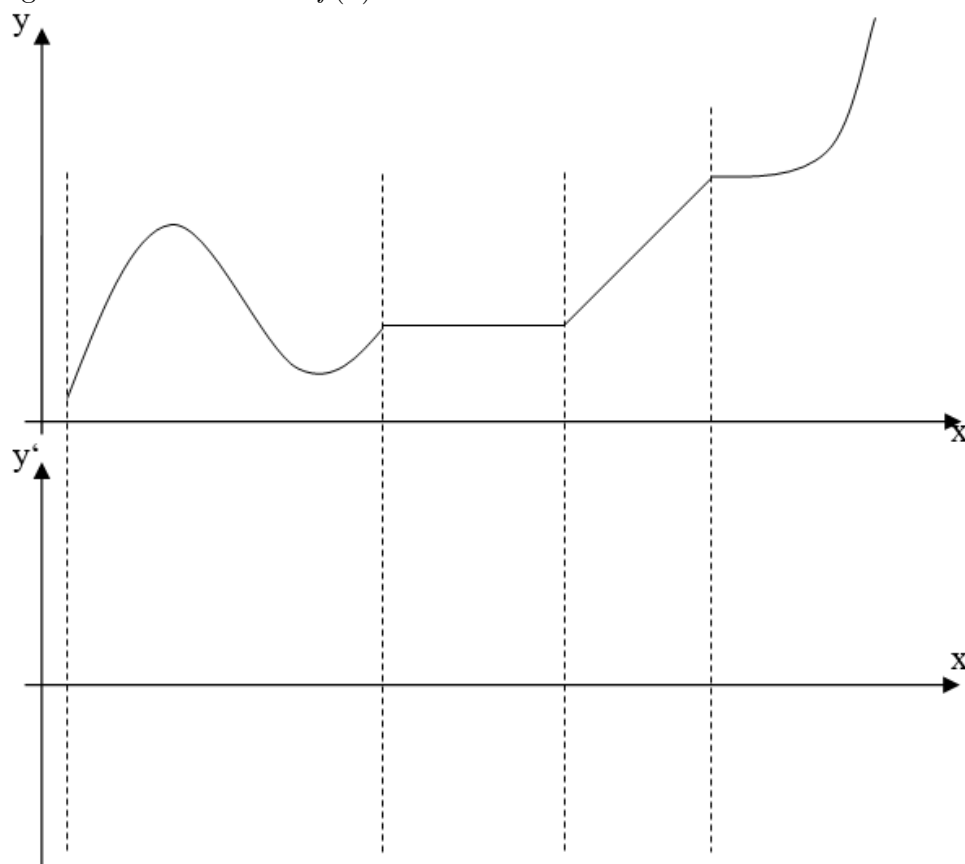
- (e)  $4 \cdot 3^x - 4 = 2^{2x}$  lösen.

**36** Graphisch Ableiten, Kurvendiskussion

## Differentialrechnung

**Aufgabenstellung**

Gegeben ist die Funktion  $f(x)$



- (a) Skizziere ins zweite Koordinatensystem unterhalb den Graphen der Ableitungsfunktion  $f'(x)$ .
- (b) Wie findet man Extremalstellen?

Notwendige und hinreichende Bedingung

- (c) Was bedeutet  $f'' = 0$ ? Begründung
- (d) Gegeben  $f(x) = 3x - x^2$ . Skizziere den Graphen. Einbeschriebenes Rechteck mit maximaler Fläche?

<b>37</b>	<b>Kombinatorik</b>	Stochastik
-----------	---------------------	------------

**Aufgabenstellung**

Beim Deutsch-Aufsatz der Matura stehen 3 Themen zur Auswahl, welche die 20 Kandidatinnen und Kandidaten alle gleich stark ansprechen.

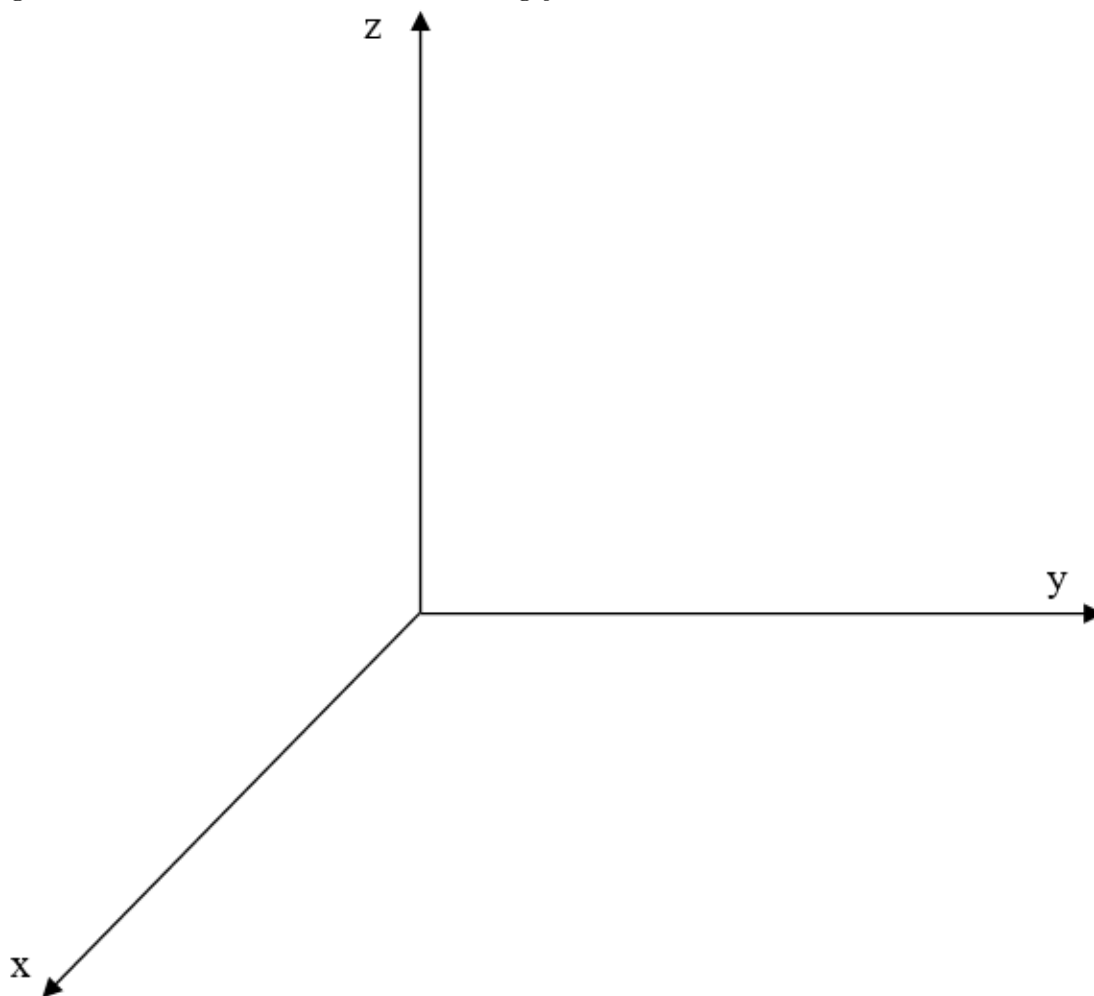
- (a) Wie gross ist die W'keit, dass niemand Thema 1 wählt?
- (b) Wie gross ist die W'keit, dass genau 4 Thema 2 wählen?

Erkläre die Formel.

- (c) Wie gross ist die W'keit, dass mind. 2 Thema 3 wählen?
- (d) Eröffnung 'Eile mit Weil' mit einer 5. Spiel zu zweit. Wie gross ist die W'keit, dass der erste Spieler das Spiel eröffnen kann?

**38****Ebene, Gerade****Vektorgeometrie****Aufgabenstellung**

Gegeben ist die Ebene  $E$  mit der Gleichung  $y + 2z - 8 = 0$



- (a) Welche besondere Lage hat die Ebene?
- (b) Skizziere die Ebene?
- (c) Betrachte die Gerade durch  $A(8/0/0)$  und  $B(0/8/4)$ . Wie lautet die Geradengleichung?
- (d) Wie lautet der Schnittpunkt der Geraden und der Ebene?

Schnittwinkel?

- (e) Ebene  $F$ :  $x + y + z - 8 = 0$ . Bestimme die Schnittgerade?
- (f) Abstand des Ursprungs von  $F$ .



<b>39</b>	<b>Sigma Notation, AF, AR</b>	Folgen und Reihen
-----------	-------------------------------	-------------------

**Aufgabenstellung**

Gegeben

$$\sum_{i=1}^5 (1 + 2i)$$

- (a) Berechne den Wert des obigen Terms.
- (b) Schreibe mit dem Summenzeichen die Summe der natürlichen Zahlen von 100 bis und mit 1000.

Wie sieht es aus, wenn nur die geraden Zahlen aufsummiert werden sollen?

- (c) Berechne diese Summe.

Formeln? Herleitung. Wie sieht es aus, wenn nur die geraden?

- (d) Berechne

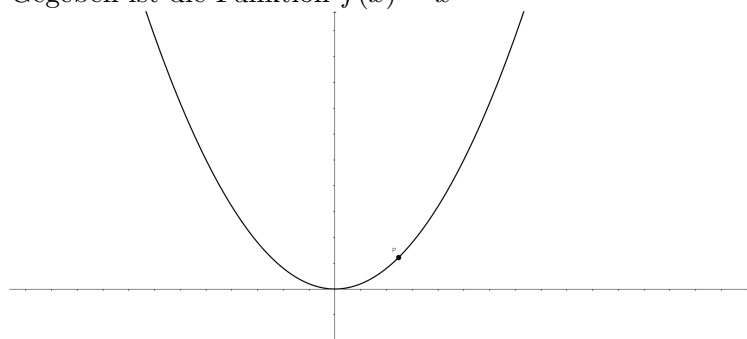
$$20 + 27 + 34 + \dots + 1490$$

.

- (e) Wie sieht es bei GF und GR aus?

**40 Grundlagen, Regeln****Differentialrechnung****Aufgabenstellung**

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = x^2$



- (a) Bestimme die Steigung der Funktion in einem beliebigen Punkt P mit Hilfe des Differenzenquotienten. Erkläre durch entsprechende Ergänzungen in der Grafik.
- (b) Welche Ableitungsregeln sind dir bekannt?

$$\sin(x) \cdot e^x, \frac{x^3}{\cos(x)}, \sqrt{\tan(3x^2)}$$

- (c) Bestimme die Gleichung der Tangenten an den Graphen der Funktion  $f(x) = \frac{x}{x-2}$ , welche senkrecht zur Geraden  $g : x - 2y - 3 = 0$  steht.
- (d) Unter welchem Winkel schneidet der Graph der Funktion die  $x$ -Achse?

41	2D	Vektorgeometrie
----	----	-----------------

**Aufgabenstellung**

Von einem gleichschenkligen Dreieck  $ABC$  ist die Basis durch die Eckpunkte  $A(3/7)$  und  $B(7/4)$  bestimmt.

- (a) Berechne die Koordinaten von  $C$ , so dass die Fläche des Dreiecks 25 beträgt.

Länge des Vektors  $AB$  mal Höhe. Höhe mit Normalvektor.

- (b) Umkreis- oder Inkreismittelpunkt?

<b>42</b>	<b>Geraden</b>	<b>Vektorgeometrie</b>
-----------	----------------	------------------------

**Aufgabenstellung**

Gegeben sind die Geraden:

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und

$$h : \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Wie ist die gegenseitige Lage der beiden Geraden?
- (b) Ist es möglich, einen Würfel zu bilden, dessen eine Kante auf g und die andere auf h liegt?  
Zwischenwinkel?

Welches Volumen hat dieser Würfel? (Gibt einiges zu tun: Abstand der Geraden bestimmen, d.h. Ebene aufstellen, HNF)

- (c) Wo und unter welchem Winkel durchstösst die Gerade h die xy-Ebene?

<b>43</b>	<b>GR, GF</b>	Folgen und Reihen
-----------	---------------	-------------------

**Aufgabenstellung**

- (a) Schalte zwischen den Zahlen 243 und 48 drei Zahlen so ein, dass eine geometrische Folge entsteht.

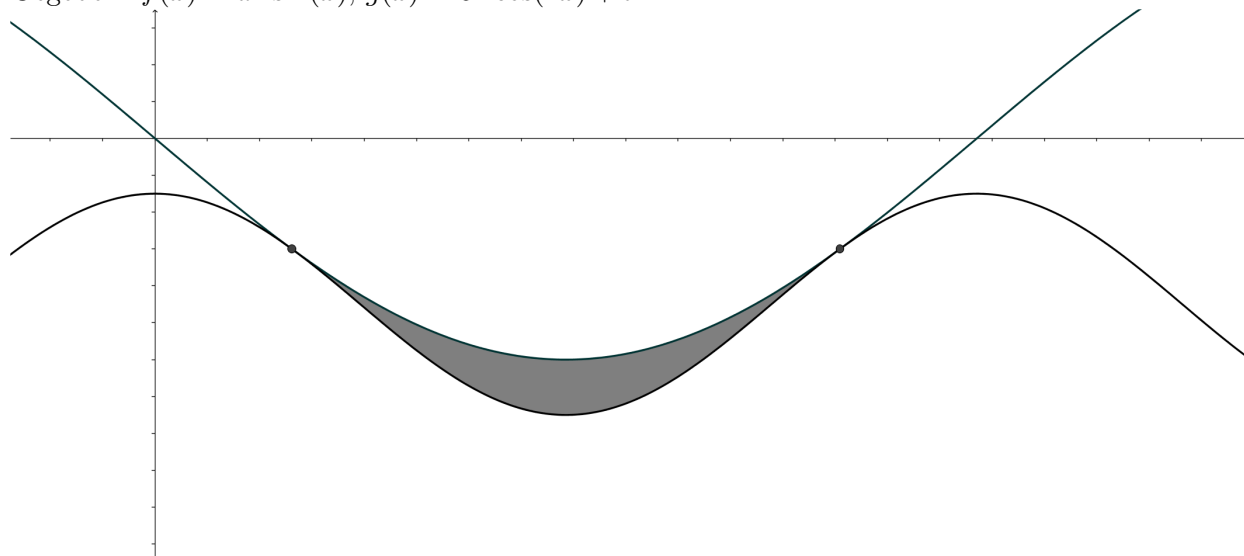
explizite und rekursive Beschreibung. zwei Lösungen.

- (b) Gegen welchen Grenzwert läuft diese geometrische Folge?
- (c) Gegen welchen Grenzwert läuft die zugehörige geometrische Reihe?
- (d) Wie viele Glieder müssen addiert werden, damit sich die Summe nur um 1% des Grenzwertes unterscheidet?

(e)

**44** Trigonometrische Funktionen

Integralrechnung

**Aufgabenstellung**Gegeben:  $f(x) = a \cdot \sin(x)$ ,  $g(x) = 6 \cdot \cos(2x) + b$ 

- (a) Welchen Einfluss auf die Graphen haben die Parameter  $a$  und  $b$  sowie die 2?
- (b) Bestimme  $a$  und  $b$  so, dass sich die Funktionen bei  $x = \frac{\pi}{6}$  berühren.
- (c) Ein weiterer Berührungspunkt liegt bei  $x = \frac{5\pi}{6}$ . Wie gross ist die von beiden Graphen eingeschlossene Fläche (siehe Abb.)
- (d) Gleichung der Geraden, die  $f(x)$  bei  $x = \frac{\pi}{6}$  senkrecht schneidet.

(e)

<b>45</b>	<b>Kombinatorik</b>	<b>Stochastik</b>
-----------	---------------------	-------------------

**Aufgabenstellung**

Bei einer Lotterie heisst es: "Jedes vierte Los gewinnt!" Du kaufst vier Lose.

- (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens 1 Gewinnlos dabei?
- (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau zwei Gewinnlose dabei?

Binomialkoeffizient, Definition...

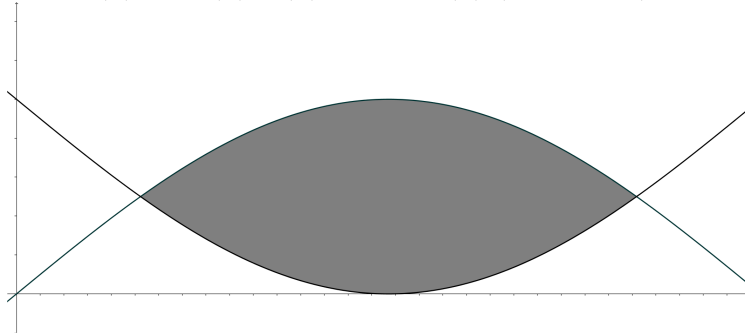
- (c) Wie viele Lose musst du kaufen, um mit 95% Wahrscheinlichkeit mindestens 1 Gewinnlos zu erhalten? (ohne Solver!)

<b>46</b>	<b>Trigonometrische Funktionen, Rotationskörper</b>
-----------	---

	<b>Integralrechnung</b>
--	-------------------------

**Aufgabenstellung**

Geg:  $f(x) = \sin(x)$ ,  $g(x) = 1 - \sin(x)$  (siehe Abb.).



(a) Bestimme mithilfe partieller Integration das Integral:

$$\int \sin^2(x)$$

$$\begin{aligned} \int \sin^2(x) dx &= \int \sin(x) \sin(x) dx = -\sin(x) \cos(x) - \int -\cos(x) \cos(x) dx = \\ &= -\sin(x) \cos(x) \overset{\text{nicht 'minus'}}{+} \int \cos^2(x) dx = -\sin(x) \cos(x) + \int 1 - \sin^2(x) dx = \\ &= \sin(x) \cos(x) + \int 1 dx - \int \sin^2(x) dx = -\sin(x) \cos(x) + x - \int \sin^2(x) dx \end{aligned}$$

(b) Berechne das Rotationsvolumen des schattierten Körpers.

Erkläre die Integrationsgrenzen mit dem Einheitskreis

(c) Schnittwinkel zwischen den beiden Graphen?



47	Ebenen	Vektorgeometrie
----	--------	-----------------

**Aufgabenstellung**

Gegeben sind die beiden Ebenen:

$$E_1 : x - 2y + 2y + 3 = 0$$

und

$$E_2 : 4x + 3z - 5 = 0$$

- (a) Bestimme das Zentrum der Kugel, das die beiden Ebenen berührt und deren Zentrum auf der  $x$ -Achse liegt.
- (b) Welchen Radius hat die Kugel

Gib die Kugelgleichung an.

- (c) Schnittwinkel der beiden Ebenen?

48	Vollständige Induktion	Folgen und Reihen
----	------------------------	-------------------

**Aufgabenstellung**

Zu zeigen ist: 3 ist stets ein Teiler von  $n^3 - n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

- (a) Welche zwei Teile gehören zu einer vollständigen Induktion?
- (b) Beweise obige Aussage mittels vollständiger Induktion.
- (c) Ich behaupte: Alle Pferde sind weiss. (vollständige Induktion mündlich vortragen). Was ist daran falsch?
- (d) Beweise: Eine  $n$ -elementige Menge  $M$  besitzt stets  $2^n$  Teilmengen.
- (e) 6 Farbensatz.

49	Vollständige Induktion	Folgen und Reihen
----	------------------------	-------------------

**Aufgabenstellung**

Zu zeigen ist:

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$$

- (a) Welche zwei Teile gehören zu einer vollständigen Induktion?
- (b) Beweise obige Aussage mittels vollständiger Induktion.
- (c) Ich behaupte: Alle Pferde sind weiss. (vollständige Induktion mündlich vortragen). Was ist daran falsch?
- (d) Beweise: Eine  $n$ -elementige Menge  $M$  besitzt stets  $2^n$  Teilmengen.
- (e) 6 Farbensatz.

<b>50</b>	<b>Rotationskörper</b>	Zusatz S
-----------	------------------------	----------

**Aufgabenstellung**

Leite die Volumenformel für eine Kugel mit Radius  $r$  her

<b>51</b>	<b>Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung</b>	Zusatz S
-----------	---	----------

**Aufgabenstellung**

Wie lautet der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung? Begründe ihn anschaulich.

<b>52</b>	<b>Folgen und Reihen</b>	Zusatz S
-----------	--------------------------	----------

**Aufgabenstellung**

Wie lautet die Definition von Konvergenz einer Folge in  $\varepsilon$  Notation?

Was ist ein Häufungspunkt?